



工程数学解析

数学在力学中的应用

關谷 壮 著

陈 和 王斌耀 蒋福民 译
徐建平 王尔琪 陆林生 校



同济大学出版社

工程数学解析

——数学在力学中的应用

関谷 壮 著

陈 和 王斌耀 蒋福民 译
徐建平 王尔琪 陆林生 校



同济大学出版社



3 0711 0141 8

内 容 提 要

本书共分十一章,内容有:矩阵、矢量、张量、偏导数、定积分、线积分、面积分、场的关系式、复数与复变函数、傅立叶分析、微分方程、变分法、数值分析法等。本书在工程应用方面涉及理论力学、材料力学、流体力学、弹性力学、板壳力学、电工学等领域。

全书内容丰富,语言精练,选材独特,它是一本工程技术人员应该必备的参考书,也是一本对已经掌握了一定的数学基本知识但不知如何去应用于工程问题的大学生们所期望的教科书或教学参考书。

作为了解日本高校工科教学情况的窗口,对从事大学数学、力学教学和研究的教师,本书对于他们来说也不无启发和借鉴。

图书在版编目(CIP)数据

工程数学解析:数学在力学中的应用/(日)関谷 壮
著;陈和等译. —上海:同济大学出版社,2002.10
ISBN 7-5608-2499-4

I. 工… II. ①关… ②陈… III. 数学-应用-工
程力学 IV. TB12

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 064559 号

工程数学解析——数学在力学中的应用

関谷 壮著 陈 和 王斌耀 蒋福民 译
徐建平 王尔琪 陆林生 校

工業数学解析

著者 関谷 壮 © 1988
発行 共立出版株式会社
ISBN 4-320-07120-4

责任编辑 解明芳 责任校对 郁 峰 封面设计 精 英

出 版 行	同济大学出版社
	(上海四平路 1239 号 邮编 200092 电话 021-65985622)
经 销	全国各地新华书店
印 刷	同济大学印刷厂印刷
开 本	787mm×960mm 1/16
印 张	14.75
字 数	295000
印 数	1—3000
版 次	2002 年 10 月第一版 2002 年 10 月第一次印刷
书 号	ISBN 7-5608-2499-4/O·220
定 价	23.00 元

本书若有印装质量问题,请向本社发行部调换

译者序

本书是根据共立出版株式会社出版的《工程数学解析》译出。该书由日本著名专家、边界元权威関谷壮教授(大阪电气通信大学、大阪府立大学名誉教授)所著,由日本材料学会冲击部门委员会委员长谷村贞治教授(大阪府立大学)介绍给同济大学。

本书与数学类专业书籍不同,它是为了让学习者理解了数学的解法之后,在解决实际问题时能够恰当应用为目的的,书中尽可能多地选用工程中遇到的问题,讲解问题的处理方法或数学计算方法。本书内容丰富,特色甚多,读者可从内容提要 and 作者前言中获知其梗概。

本书由同济大学理学院教师合作完成翻译任务,其中,翻译分工为陈和(力学、高工)完成1~6章、王斌耀(力学,副教授)完成7,8,11章、蒋福明(数学、副教授)完成9,10章;译校分工为徐建平(数学、副教授)、蒋福民(1~3,5~7,10~11章),陆林生(数学、副教授)(4,8章),王斌耀(9章)。王尔琪作为留日博士统校了大部分译稿。

本书在翻译过程中得到了原工程力学系主任宋子康教授的悉心指导,并抽审了部分译稿,提出了许多宝贵的意见;另外,在翻译过程中还得到了许多相关专业的教师的大力相助,在此一并表示衷心的感谢。

本书在出版过程中获得了原著作者関谷壮先生、共立出版株式会社出版本部南条光章先生的全力支持和鼎力相助,谨此致以万分感谢。

由于译者水平有限,书中缺点难免,恳请读者批评指正。

译者

2002年2月

CHINA

前 言

近年来,随着我国尖端技术的迅速发展,在数学、物理、化学、生物等基础学科领域中,具备高水平的知识变得十分必要。

本书把工学部专业教育学科中的应用数学讲义,从工学领域中的数学使用者的角度出发,以概论的形式编著成教材。因此,本书与数学类专业书不同,它没有对理论体系或定理进行深入严密的论证,而是为了让读者更好地理解数学的使用方法,能恰当地运用到实际问题中去,尽可能多地引用了工学领域中的问题,并把问题的处理方法、数学公式的计算方法以及对在专业书中出现的数学公式的理解作为本书的重点。本书内容虽以接受过大学一年级基础数学教育的读者为对象,但也为了让不具备上述基础的读者充分理解而编入了大量的复习内容。另外,书中也涉及了少量的专业性知识,可把这部分内容放在高年级的研讨会上进行。

因为笔者并非数学专业出身,所以,从数学专家的角度来看,本书可能存在各种不足之处,在这一点上希望能得到数学专家的指教。作为笔者的愿望,希望数学专家也能阅读本书,了解一下作为工程技术人员所必备的部分数学知识,并把它当作为工学部学生讲课时的参考。

在撰写本书的时候,参考了许多已经出版的书籍。在这里,对这些书籍的作者表示感谢。最后,在本书出版之际,得到了共立出版株式会社编辑部的植山光阳先生和齐藤英明先生的格外关照,在这里致以深深的谢意。

著 者

目 录

第 1 章 矩 阵

1.1 矩阵及其表示方法	(1)
1.2 各种矩阵的名称	(2)
A. 长方矩阵	(2)
B. 行矢量与列矢量	(3)
C. 转置矩阵	(3)
D. 方阵	(4)
E. 对角矩阵	(4)
F. 对称矩阵与反对称矩阵	(5)
G. 零矩阵	(5)
1.3 矩阵的计算方法	(6)
1.4 逆阵	(10)
1.5 工程上的应用	(12)
A. 结构力学上的应用	(12)
B. 二对端子电路中的串列矩阵	(14)
习题 1	(15)
补遗	(18)
1.1 用电子计算机求解联立多元一次代数方程式和计算逆阵	(18)
1.2 基尔霍夫定律	(18)
A. 第 1 定律	(18)
B. 第 2 定律	(18)

第 2 章 矢 量

2.1 标量与矢量	(20)
2.2 矢量的相等、和、实数倍、差	(20)
2.3 矢量之和在工程力学中的应用	(22)
A. 作用在一点上的三个力的平衡(拉密定理)	(22)
B. 克雷莫纳应力图	(23)
2.4 矢量的解析表达式	(26)
2.5 矢量的内积	(28)
2.6 矢量的外积	(31)

习题 2	(34)
补遗	(36)

2.1 正弦定理

第 3 章 张 量

3.1 0 阶、1 阶、2 阶张量	(37)
3.2 2 阶张量之例(应力张量)	(40)
3.3 下标记号	(48)
习题 3	(50)

第 4 章 偏导数

4.1 多元函数	(53)
4.2 偏微分法	(53)
4.3 偏导数的链式法则	(55)
4.4 隐函数的求导	(56)
4.5 方向导数	(57)
4.6 全微分	(60)
4.7 雅可比	(62)
4.8 多元函数的泰勒展开	(65)
习题 4	(66)

第 5 章 定积分

5.1 定积分的定义和计算	(68)
5.2 定积分定义的扩大	(71)
5.3 定积分的工程应用	(71)
A. 在水力学中的应用(流过堰的流量)	(71)
B. 在材料力学中的应用(惯性矩)	(73)
5.4 含参变量的积分的微分法(莱布尼茨公式)	(75)
5.5 被积函数为无界时的定积分和无限积分	(78)
5.6 Γ 函数与 β 函数	(79)
5.7 二、三个重要的定积分	(82)
习题 5	(85)

第 6 章 线积分、面积分、场的关系式

6.1	数量场、矢量场、张量场	(88)
6.2	线积分	(88)
	A. 沿平面曲线的线积分	(88)
	B. 沿空间曲线的线积分	(91)
6.3	面积分	(92)
6.4	数量场的梯度变化率	(93)
6.5	矢量场的发散	(96)
6.6	矢量场的旋度	(98)
6.7	二维场的关系式	(101)
6.8	三维场的关系式	(104)
	A. 高斯定理	(104)
	B. 格林公式	(104)
	C. 斯托克斯(Stokes)定理	(105)
习题 6		(105)

第 7 章 复数与复变函数

7.1	复数	(109)
7.2	复平面与极形式	(110)
7.3	复变函数	(113)
7.4	复积分	(120)
7.5	解析函数的泰勒展开	(123)
7.6	罗朗展开	(124)
7.7	留数	(126)
7.8	保角映射及在流体力学方面的应用	(129)
习题 7		(134)

第 8 章 傅立叶分析

8.1	傅立叶级数	(138)
8.2	傅立叶变换	(140)
8.3	拉普拉斯变换	(142)
8.4	拉普拉斯逆变换	(146)
8.5	在工程上的应用	(148)

习题 8	(151)
------------	-------

第 9 章 微分方程

9.1 微分方程	(154)
9.2 1 阶常微分方程	(154)
9.3 常系数 2 阶线性常微分方程	(159)
9.4 二阶非线性常微分方程	(164)
9.5 联立常微分方程组	(167)
9.6 偏微分方程	(168)
习题 9	(174)

第 10 章 变分法

10.1 函数与泛函	(178)
10.2 泛函举例	(178)
10.3 欧拉方程	(178)
10.4 Ritz 方法	(186)
习题 10	(188)

第 11 章 数值分析法

11.1 绪言	(189)
11.2 有限元法	(189)
11.3 差分法	(195)
11.4 边界元法	(199)
11.5 电荷模拟法	(204)
习题 11	(207)

问题与习题的答案	(209)
----------------	-------

第1章 矩 阵

1.1 矩阵及其表示方法

矩阵(matrix)就如

$$\left. \begin{array}{l} \left[\begin{array}{ccc} 1 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 8.8 \\ -\frac{7}{3} & \sqrt{\pi} & 13 \end{array} \right] [u, v, w] \\ \left\{ \begin{array}{l} X \\ Y \\ Z \end{array} \right\} \left[\begin{array}{ccc} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{array} \right] \\ \left| \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array} \right| \end{array} \right\} \quad (1.1)$$

这些例子那样,是将数字或文字符号排成长方形,并在其左右两侧用括弧(), { }, []或双重线 || || 围住后组成的。它们其中的一个数字或文字符号(上例中的 $1, -\sqrt{3}/2, 8.8, \dots, a_{32}, a_{33}, b_3$ 等)称为矩阵的元素(element)。矩阵的元素可以像上面的例子那样是一个数或一个文字符号,也可以如下面的矩阵(1.2)的例子所示,用一个矩阵作为矩阵的元素。

$$\left[\begin{array}{cc} [a_1 & b_1] & [c_1 & d_1] \\ [a_2 & b_2] & [c_2 & d_2] \\ [a_3 & b_3] & [c_3 & d_3] \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} \right\} \quad (1.2)$$

在矩阵中,横排称为行(row),纵排称为列(column)。若给矩阵中的元素添加编号,对于行,以从上往下的顺序分别称为第1行,第2行……对于列,则从左至右分别称为第1列,第2列……请看下面的例子:

The diagram shows a 3x4 matrix enclosed in large square brackets. The matrix is divided into a 3x4 grid of smaller dashed-line boxes. The elements are labeled as follows:

- Row 1: a_{11} , a_{12} , a_{13} , b_1
- Row 2: a_{21} , a_{22} , a_{23} , b_2
- Row 3: a_{31} , a_{32} , a_{33} , b_3

 To the right of the matrix, horizontal arrows point to each row, labeled "(第 1 行)", "(第 2 行)", and "(第 3 行)" respectively. Below the matrix, vertical arrows point to each column, labeled "(第 1 列)", "(第 2 列)", "(第 3 列)", and "(第 4 列)" respectively. The entire diagram is labeled (1.3) on the right.

这个矩阵是由三个行,四个列组成的矩阵,可以将它称为 3 行 4 列矩阵,或者简称(3, 4)矩阵。在 3 上添加横线表示 3 是行数。

这里叙述如上所示的,其元素是长方形排列的矩阵,对这些矩阵的各种加法、乘法等的计算方法作定义,可以形成对实际问题有用的计算方法的体系。

整个矩阵有时也可用一个文字表示。例如,可以用一个文字 A, X 等将前面式(1.1)的矩阵表示为

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 8.8 \\ -\frac{7}{3} & \sqrt{\pi} & 13 \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

$$X = (x, y, z)$$

[问 1.1] 在式(1.1)所示的各矩阵中,用 (\overline{m}, n) 的形式表示其行数 m 、列数 n , 并列举各行、各列的元素。

[提示] 例如,矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ 是 $(\overline{2}, 2)$ 矩阵

第 1 行的元素——1, 2 第 1 列的元素——1, 3

第 2 行的元素——3, 4 第 2 列的元素——2, 4

1.2 各种矩阵的名称

A. 长方矩阵

长方矩阵是如式(1.1)的左上方的矩阵那样的,元素成长方形状排列的矩阵,它是最一般的矩阵形式。最普通的长方形矩阵具有下面的形式:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad (1.5)$$

这个矩阵的元素有两个下标。第1个下标是该元素所属行的编号,第2个下标是该元素所属列的编号。仅用1个元素代表式(1.5)右边的矩阵时可以记为 $[a_{ij}]$ 。

[问 1.2] 在式(1.5)的矩阵中,下面的元素为第几行第几列元素?

(a) a_{m1} (b) a_{13} (c) a_{mn}

B. 行矢量与列矢量^①

仅由1行组成的矩阵称为行矢量(row vector)或者称为1行矩阵(row matrix)

[例 1.1] 行矢量的例子

(x, y) ——平面上的点的直角坐标;

$[u, v, w]$ ——表示流体的流量中的一个流体粒子的速度沿 x, y, z 方向的分量。

另外,仅由1列组成的矩阵称为列矢量(column vector)或者称为1列矩阵(column matrix)。

[例 1.2] 列矢量的例子

$\begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{Bmatrix}$ ——表示力沿直角坐标 x, y, z 方向的分量。

对于列矢量的情况,常常用中括弧 $\left\{ \right\}$ 。

往往将行矢量 $[a_1, a_2, \cdots, a_n]$ 记为 $[a_i]$,列矢量 $\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{Bmatrix}$ 记为 $\{a_i\}$ 。

C. 转置矩阵

有一矩阵 A , 交换其行与列后得到的矩阵 A^T (有时也用 A' 表示) 称为原来的矩阵 A 的转置矩阵(transposed matrix)

[例 1.3] 转置矩阵的例子

^① 矢量将在第2章中详细叙述。

$$(a) A=(x, y, z) \text{ 时, } A^T = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}$$

$$(b) A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \text{ 时, } A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

[问 1.3] 求下面矩阵 A 的转置矩阵 A^T

$$(a) A = \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{Bmatrix}, \quad (b) A = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

D. 方阵

在长方矩阵式(1.5)中的行数 m 与列数 n 相等的情况下, 即 $m=n$ 时的情况称为方阵(square matrix)。即

$$A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad (1.6)$$

是方阵。

[例 1.4] 问 1.1 提示的矩阵, 问 1.3(b) 的矩阵都是方阵。

E. 对角矩阵

在式(1.6)的矩阵 $[a_{ij}]$ 中 $i \neq j$ 的元素 a_{ij} 全部为零时, 换言之, 沿 a_{11} 与 a_{nn} 连接的直线(这称为矩阵的主对角线(principal diagonal)上的元素以外的元素全部为零时, 这样的矩阵称为对角矩阵(diagonal matrix)。

[例 1.5] 对角矩阵的例子

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \text{——材料力学中的主应力}$$

另外, 主对角线上的元素全部为 1 时的对角矩阵称为单位矩阵。

[例 1.6] 单位矩阵的例子。

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

这里 I 的下标 2, 3 是单位矩阵的行数(=列数)。

F. 对称矩阵与反对称矩阵

在式(1.6)的方阵中, 当 $a_{ij} = a_{ji}$ 时称为对称矩阵(symmetrical matrix), 当 $a_{ij} = -a_{ji}$ 时称为反对称矩阵(skew matrix), 反对称矩阵的主对角线上的元素 $a_{ii} = -a_{ii}$, 因此 $a_{ii} = 0$, 即主对角线上的元素为零。

[例 1.7] 对称矩阵之例

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \text{——材料力学中的应力}$$

[例 1.8] 反对称矩阵之例

$$\begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \text{——连续体力学中的转动}$$

由上可知, 在与主对角线对称的位置上的元素互等, 对于反对称矩阵, 其绝对值相等、符号相反。

G. 零矩阵

全部元素都为零的矩阵称为零矩阵(zero matrix)。

[例 1.9] 零矩阵之例子

$$(a) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (b) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

[问 1.4] 针对下面各矩阵, 从题末选择相应的名称将圆圈中的记号 1、2、3……填入○中。

$$(a) (1, 0, 2, -3) \quad \bigcirc$$

$$(b) \begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \bigcirc \quad (c) \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \bigcirc$$

$$(d) \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} \bigcirc \quad (e) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \bigcirc \quad (f) \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{bmatrix} \bigcirc$$

$$(g) \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{bmatrix} \bigcirc \quad (h) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \bigcirc$$

① $(3,4)$ 矩阵, ② 行矢量, ③ 列矢量, ④ 对称矩阵, ⑤ 反对称矩阵, ⑥ 对角矩阵, ⑦ 单位矩阵 I_4 , ⑧ 零矩阵。

1.3 矩阵的计算方法

因为矩阵不是单一的数, 所以必须定义矩阵的计算方法。这种算法在实际中将成为对各个领域都有用的方法。我们用下面的例子来说明。即使对于一般的情况, 根据这些例子也可以类推。

[例 1.10] 矩阵与矩阵相等

若要矩阵 A 与矩阵 B 相等, 只要 A 与 B 具有同样的行数和列数, 其对应的元素彼此相等, 就定义为 A 与 B 相等, 例如:

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g & h & i \\ j & k & l \end{bmatrix}$$

而且 $a=g, b=h, c=i, d=j, e=k, f=l$ 是对应相等的, 因此, 联立二元一次方程式:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \quad (1.7)$$

可以表示为

$$\begin{cases} a_1x + b_1y \\ a_2x + b_2y \end{cases} = \begin{cases} c_1 \\ c_2 \end{cases} \quad (1.8)$$

[例 1.11] 矩阵 A 与矩阵 B 相加(或者矩阵 A 减矩阵 B)

当矩阵 A 与矩阵 B 具有相同的行数和列数, 上述计算才能被定义。其做法如下:

$$(a) \begin{bmatrix} 4 & 9 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+0 & 9+(-3) \\ 6+5 & 2+7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 11 & 9 \end{bmatrix}$$

$$(b) \begin{bmatrix} 4 & 9 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4-0 & 9-(-3) \\ 6-5 & 2-7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 12 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$$

[例 1.12] 数与矩阵相乘

当 $A = \begin{bmatrix} 4 & 9 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ 时

$$3A = 3 \begin{bmatrix} 4 & 9 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \times 4 & 3 \times 9 \\ 3 \times 6 & 3 \times 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 27 \\ 18 & 6 \end{bmatrix}$$

$$(-1)B = (-1) \times \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1) \times 4 \\ (-1) \times (-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

故 $(-1)A$ 可写为 $-A$ 。

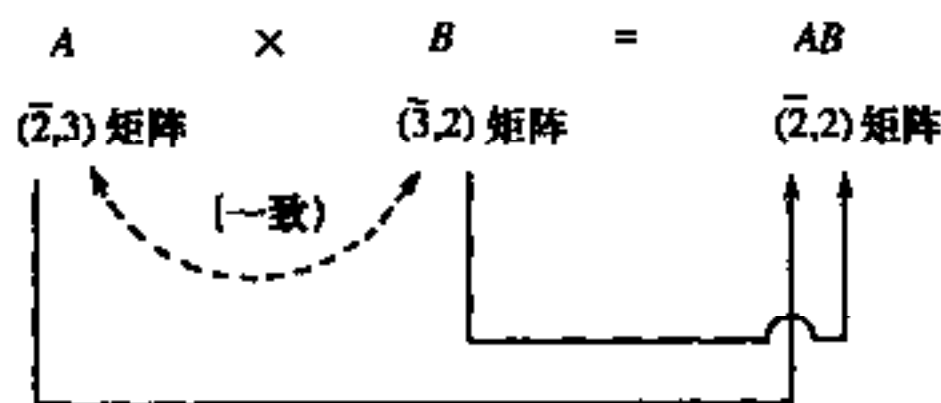
[例 1.13] 矩阵与矩阵相乘(矩阵与矩阵之积)。

举例说明确定矩阵 A 与矩阵 B 相乘的乘积 AB 的方法。这种计算只有当 A 的列数与 B 的行数相同时才能进行。

设 $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 5 & -6 \end{bmatrix}$ $(\bar{2}, 3)$ 矩阵

$B = \begin{bmatrix} 6 & -5 \\ 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ $(\bar{3}, 2)$ 矩阵

因为 A 的列数 3 与 B 的行数 3 相等, 所以可以求得它们的乘积 AB 。这时 AB 也是另外的一个矩阵, 其行数与列数分别根据 A, B 的行数, 列数可以求得如下:



AB 的第 1 行, 第 1 列的元素由 A 的第 1 行与 B 的第 1 列的对应序号的元素彼此相乘后相加而得:

$$1 \times 6 + (-2) \times 4 + 3 \times (-2)$$

AB 的第 2 行, 第 1 列的元素由 A 的第 2 行和 B 的第 1 列的对应序号的元素彼此相乘后相加得到:

$$(-4) \times 6 + 5 \times 4 + (-6) \times (-2)$$

AB 的第 2 行, 第 2 列的元素由 A 的第 2 行与 B 的第 2 列的对应序号的元素相

乘后相加得到:

$$(-4) \times 6 + 5 \times 4 + (-6) \times (-2)$$

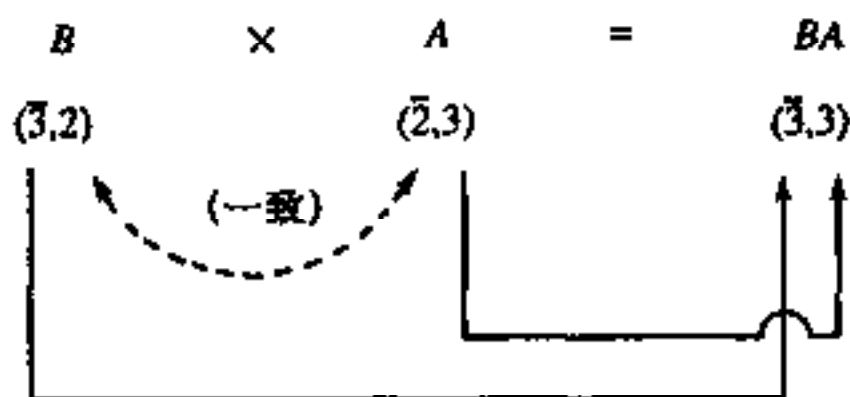
AB 的第 2 行, 第 2 列的元素由 A 的第 2 行与 B 的第 2 列的对应序号的元素彼此相乘后相加得到:

$$(-4) \times (-5) + 5 \times (-3) + (-6) \times 1$$

即 AB 为:

$$\begin{aligned}
 AB &= \begin{bmatrix} \boxed{1} & \boxed{-2} & \boxed{3} \\ \boxed{-4} & \boxed{5} & \boxed{-6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boxed{6} \\ \boxed{4} \\ \boxed{-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boxed{-5} \\ \boxed{-3} \\ \boxed{1} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 \times 6 + (-2) \times 4 + 3 \times (-2) & 1 \times (-5) + (-2) \times (-3) + 3 \times 1 \\ (-4) \times 6 + 5 \times 4 + (-6) \times (-2) & (-4) \times (-5) + 5 \times (-3) + (-6) \times 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 6 - 8 - 6 & -5 + 6 + 3 \\ -24 + 20 + 12 & 20 - 15 - 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & 4 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

用同样的方法也可确定 BA 。这时



BA 为 $(\bar{3},3)$ 矩阵。即

$$\begin{aligned}
 BA &= \begin{bmatrix} \boxed{6} & \boxed{-5} \\ \boxed{4} & \boxed{-3} \\ \boxed{-2} & \boxed{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boxed{1} \\ \boxed{-4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boxed{-2} \\ \boxed{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boxed{3} \\ \boxed{-6} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 6 \times 1 + (-5) \times (-4) & 6 \times (-2) + (-5) \times 5 & 6 \times 3 + (-5) \times (-6) \\ 4 \times 1 + (-3) \times (-4) & 4 \times (-2) + (-3) \times 5 & 4 \times 3 + (-3) \times (-6) \\ (-2) \times 1 + 1 \times (-4) & (-2) \times (-2) + 1 \times 5 & (-2) \times 3 + 1 \times (-6) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 6 + 20 & -12 - 25 & 18 + 30 \\ 4 + 12 & -8 - 15 & 12 + 18 \\ -2 - 4 & 4 + 5 & -6 - 6 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} 26 & -37 & 48 \\ 16 & -23 & 30 \\ -6 & 9 & -12 \end{bmatrix}$$

由此可见, AB 与 BA 是不相同的, 即在一般情况下矩阵与矩阵的积

$$AB \neq BA \quad (1.9)$$

交换定律(commutative law)一般不成立。

[例 1.14] 矩阵与矩阵相乘的其他例子

$$(a) \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a_1 x + b_1 y \\ a_2 x + b_2 y \end{Bmatrix}$$

因此, 例 1.10 叙述过的联立二元一次方程式(1.7)或式(1.8)可以写为:

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{Bmatrix} \quad (1.10)$$

$$(b) (x, y) \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix} = (a_1 x + b_1 y, a_2 x + b_2 y)$$

故联立方程式(1.7)也可以写为

$$(x, y) \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix} = (c_1, c_2) \quad (1.11)$$

$$(c) \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$$

又

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$$

这种情况, 矩阵 $A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$ 与 $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 之间的交换定律成立, 在 A 的左边乘以 I_2 或在 A 的右边乘以 I_1 , A 不发生变化, 即

$$AI_2 = I_2 A = A \quad (1.12)$$

即 I_2 是与在数的相乘中的 1 起同样作用的矩阵, 所以被称为单位矩阵。对于 I_3, I_4, \dots 也一样。

[问 1.5] 进行下面的矩阵计算:

$$(a) \ 3 \begin{bmatrix} 4 & 9 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} \pm 4 \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$$

$$(b) \begin{bmatrix} -3 & 5 & 6 & -8 \\ 0 & -1 & 2 & -4 \\ 7 & 9 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -7 \\ 5 & 3 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$$

[问 1.6] 将联立三元一次方程式

$$\left. \begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z &= d_3 \end{aligned} \right\} \quad (1.13)$$

写成与式(1.8)及式(1.10)同样的用矩阵表达的方程式。

[问 1.7] 对联立 n 元一次方程式

$$\left. \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned} \right\} \quad (1.14)$$

也与[问 1.6]一样进行处理。

1.4 逆阵

联立二元一次方程式(1.7)可以用式(1.10)的矩阵形式写出,该方程式的解在 $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ 时为

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1} = \frac{b_2}{a_1b_2 - a_2b_1}c_1 - \frac{b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}c_2 \\ y &= \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1} = -\frac{a_2}{a_1b_2 - a_2b_1}c_1 + \frac{a_1}{a_1b_2 - a_2b_1}c_2 \end{aligned} \right\} \quad (1.15)$$

[问 1.8] 推导联立二元一次方程式(1.7)的真实解为式(1.15)。

式(1.5)用矩阵可写为:

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & \beta_1 \\ a_2 & \beta_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{Bmatrix} \quad (1.16)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{b_2}{a_1 b_2 - a_2 b_1}, \beta_1 = -\frac{b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \\ \alpha_2 &= -\frac{a_2}{a_1 b_2 - a_2 b_1}, \beta_2 = \frac{a_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \end{aligned} \right\} \quad (1.17)$$

这时

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.18)$$

〔问 1.9〕 证明式(1.18)成立

像这样的两个方阵互相相乘的结果为单位矩阵时,它们的一方称为是另一方的逆阵(inverse matrix)。例如,设

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}, X = \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}, B = \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{Bmatrix} \quad (1.19)$$

对于用式(1.17)给出的 $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ 而组成的 $\begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{bmatrix}$ 是 A 的逆阵。 A 的逆阵写为 A^{-1} 。从而式(1.18)可以写为

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I_2 \quad (1.20)^\text{①}$$

因为联立二元一次方程式(1.7)用矩阵的形式可以表示为式(1.10),若将式(1.9)代入,则

$$AX = B \quad (1.21)$$

等式两边从左边各乘以 A^{-1} , 则

$$A^{-1}AX = A^{-1}B$$

将式(1.20)代入上式的左边,得

$$I_2 X = A^{-1}B$$

由于 $I_2 X = X$ (这种情况已经证明过)

所以

$$X = A^{-1}B \quad (1.22)$$

这与用矩阵写出的式(1.15)的表达式(1.16)是一样的。

① 这些相当于数字计算中的 $(1/a)a = a(1/a) = 1$ 或 $a^{-1}a = aa^{-1} = 1$ 。逆矩阵类比数中的倒数。

[问 1.10] 联立三元一次方程式(1.13)的解可以用下式给出:

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{d_1 b_2 c_3 - d_1 b_3 c_2 + d_2 b_3 c_1 - d_2 b_1 c_3 + d_3 b_1 c_2 - d_3 b_2 c_1}{a_1 b_2 c_3 - a_1 b_3 c_2 + a_2 b_3 c_1 - a_2 b_1 c_3 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1} \\ y &= \frac{a_1 d_2 c_3 - a_1 d_3 c_2 + a_2 d_3 c_1 - a_2 d_1 c_3 + a_3 d_1 c_2 - a_3 d_2 c_1}{a_1 b_2 c_3 - a_1 b_3 c_2 + a_2 b_3 c_1 - a_2 b_1 c_3 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1} \\ z &= \frac{a_1 b_2 d_3 - a_1 b_3 d_2 + a_2 b_3 d_1 - a_2 b_1 d_3 + a_3 b_1 d_2 - a_3 b_2 d_1}{a_1 b_2 c_3 - a_1 b_3 c_2 + a_2 b_3 c_1 - a_2 b_1 c_3 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1} \end{aligned} \right\} \quad (1.23)$$

若设这些式子中的分母不为零,证明式(1.23)为式(1.13)的真正解。提示:可以利用式(1.15)的结果,先根据式(1.23)求方程式(1.13)的未知数的系数矩阵

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$$

的逆阵 A^{-1} , 然后根据 $A^{-1}A = AA^{-1} = I_3$ 验证。

一般来说,求 n 元一次联立代数方程组(1.14)的未知数的系数矩阵,即求式(1.6)的逆阵 A^{-1} , 用手工计算并不容易,现在可以用电子计算机采用数值分析的方法来求得 A^{-1} , 且有现成的程序可以利用。另外,解一般的 n 元一次联立代数方程组的计算机程序也已经完成(参照本章补遗 1.1)。

1.5 工程上的应用

A. 结构力学上的应用

试在图 1.1 所示的弹簧两端 1,2 处沿 x 方向作用的力为 F_1, F_2 , 点 1,2 的 X 方向的位移为 u_1, u_2 , 弹簧的弹性常数(spring constant)即将弹簧仅拉长 1 英寸^①(单位长度)需要的力为 k 。



图 1.1 弹簧两端的力和位移

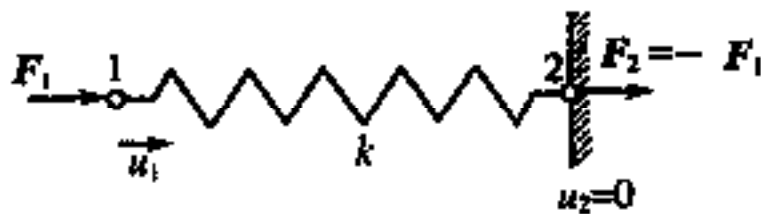


图 1.2 弹簧的右端固定时的力和位移

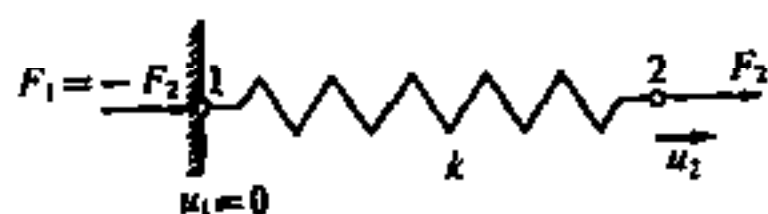
(a) $u_1 = u_1, u_2 = 0$ 时,这时如图 1.2 所示,右端固定,只有左端 1 被向右压缩 u_1 ,在左端作用着向右的力 F_1 ,在右端作用着与 F_1 大小相等方向相反的力,因此

^① 1 英寸 = 2.54cm。

$$F_1 = ku_1 = -F_2 \quad (1.24)$$

这个式子用矩阵的形式可以写为

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k & 0 \\ -k & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad (1.25)$$



(b) $u_1 = 0, u_2 = u_2$ 时, 这时如图 1.3 那样, 左端 1 固定, 右端作用力 F_2 , 在右端仅被拉长 u_2 时, 左端作用着与 F_2 大小相等方向相反的力, 因此

图 1.3 弹簧左端固定时的力与位移

$$F_2 = ku_2 = -F_1 \quad (1.26)$$

或者用矩阵可以写为

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -k \\ 0 & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad (1.27)$$

(c) $u_1 = u_1, u_2 = u_2$ 时, 这是图 1.1 的情况, 将式(1.25)、式(1.27)右边的方阵相加

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} k & 0 \\ -k & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -k \\ 0 & k \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad (1.28)$$

这个式子给出了在图 1.1 中的节点 1, 2 上作用的力 F_1, F_2 与位移 u_1, u_2 的关系。

$\begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}$ 称为弹簧的刚性矩阵(stiffness matrix)。

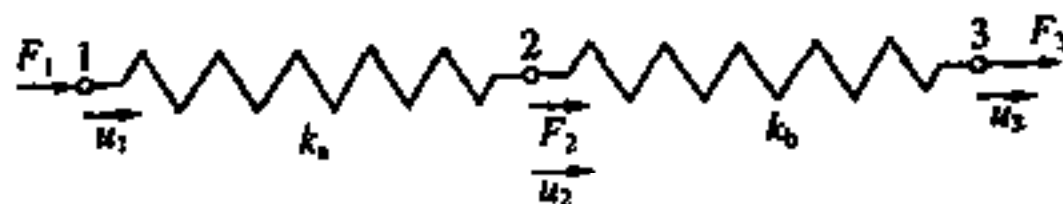


图 1.4 两个弹簧串联连接后的节点与节点位移

下面讨论如图 1.4 所示的两个弹簧 a, b (即弹性常数为 k_a, k_b) 串联连接时的情况, 与前面一样。

(a) $u_1 = u_1, u_2 = u_2 = 0$ 时, 这时由于弹簧 b 既没有伸长也没有缩短, 所以从弹簧 b 来说, 节点 2, 3 上没有任何力作用, 因此与式(1.25)完全相同

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_a & 0 & 0 \\ -k_a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \quad (1.29)$$

(b) $u_2 = u_2, u_1 = u_3 = 0$ 时, 这时弹簧 a 的右端仅被拉长 u_2 , 弹簧 b 的右端仅向右被压缩 u_2 , 这样只对节点 2 起作用, 在节点 2 上有必要加上向右的对弹簧 a 为 $k_a u_2$, 对弹簧 b 为 $k_b u_2$ 的力。因此, 作用在节点 2 上的力为 $F_2 = k_a u_2 + k_b u_2 = (k_a + k_b) u_2$ 。作为它的反力, 作用在弹簧 a 的左端的力为 $F_1 = -k_a u_2$, 作用在弹簧 b 的右端的力为 $F_3 = -k_b u_2$ 。若将它们用矩阵表示, 则

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -k_a & 0 \\ 0 & k_a + k_b & 0 \\ 0 & -k_b & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \quad (1.30)$$

(c) $u_3 = u_3, u_1 = u_2 = 0$ 时, 这时与式(1.26)、式(1.27)相同, 可以只考虑弹簧 b。因弹簧 a 既不伸长也不缩短, 所以对弹簧 a 而言, 节点 1, 2 上没有受到任何力的作用。即

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k_b \\ 0 & 0 & k_b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \quad (1.31)$$

(d) $u_1 = u_1, u_2 = u_2, u_3 = u_3$ 时, 组合式(1.29)、式(1.30)、式(1.31)三个刚性矩阵[右边第 1 因子的 $(\bar{3}, 3)$ 矩阵], 得:

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_a & -k_a & 0 \\ -k_a & k_a + k_b & -k_b \\ 0 & -k_b & k_b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \quad (1.32)$$

上式称为刚性方程式(stiffness equation)。因此, 只要给出 F_1, F_2, F_3 或 u_1, u_2, u_3 中的不管哪三个量之后, 就可以解得另外三个未知数。

B. 二对端子电路的串列矩阵^①

如图 1.5(a)所示的 1 对端子 1, 1' 为输入端, 另一对端子 2, 2' 为输出端的二对端子电路的电压、电流的关系式可以给出如下:

$$\begin{Bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{Bmatrix} \quad (1.33)$$

式中, 右边第 1 因子的 $(\bar{2}, 2)$ 矩阵称为串列矩阵(cascade matrix)。同样, 对于如图 1.5(b)的一对端子 2, 2' 为输入端, 另一对端子 3, 3' 为输出端的电路, 有

^① 電気学会, 電気回路論改訂版(電気学会大学講座), 才一ム社(1970), 榊。大野, 尾崎; 大学課程電気回路(1)(第 2 版), 才一ム社(1980)。

$$\begin{Bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_3 \\ I_3 \end{Bmatrix} \quad (1.34)$$

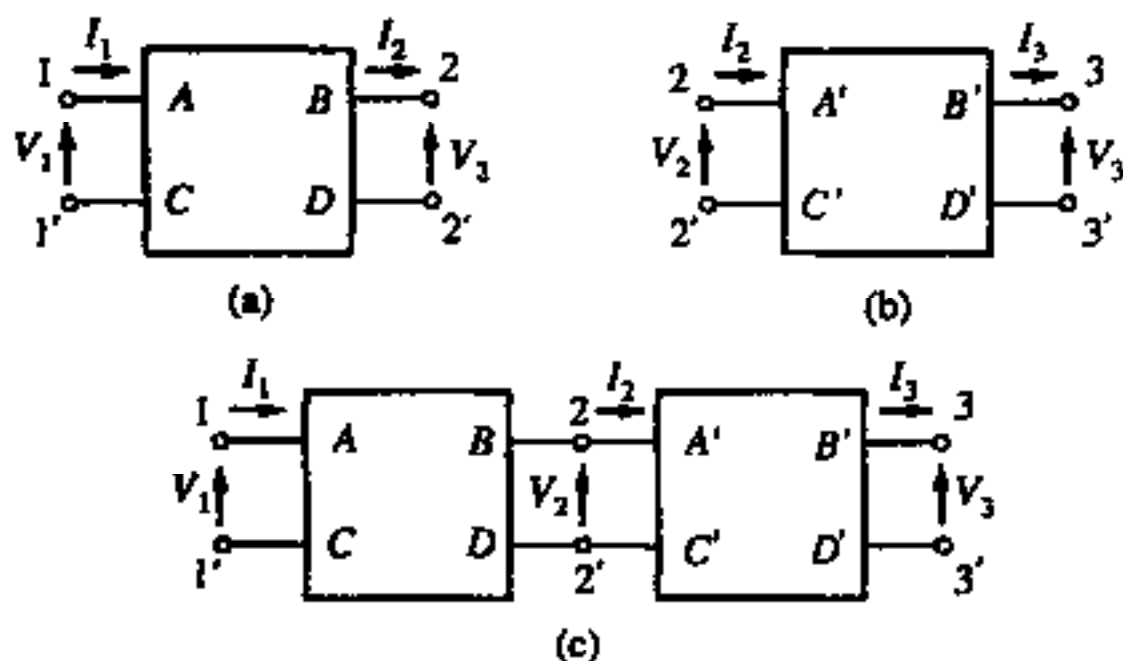


图 1.5 二对端子电路的串列矩阵

因此,如图 1.5(c)所示的两个二对端子电路串联时 V_1, I_1 与 V_3, I_3 的关系,可将式 (1.34)代入式(1.33)求得:

$$\begin{Bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_3 \\ I_3 \end{Bmatrix} \quad (1.35)$$

即两个二对端子电路串联后的串列矩阵等于各个二对端子电路的串列矩阵之积。

习题 1

1.1 进行下列矩阵的计算。

$$(a) \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{2}{3} & \frac{3}{4} \\ -\frac{1}{3} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & -\frac{4}{5} \\ \frac{3}{4} & \frac{5}{9} & \frac{5}{8} \end{bmatrix} \quad (b) 3 \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ -7 & 3 \end{bmatrix}$$

$$(c) \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & 5 & -7 \\ -2 & 5 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -7 & 6 \\ 8 & -8 \end{bmatrix}$$

1.2 求下列矩阵的逆阵。

$$(a) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad (b) \begin{bmatrix} 7 & -5 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} \quad (c) \begin{bmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 5 & 8 & 1 \\ 0 & 2 & -6 \end{bmatrix}$$

$$1.3 \text{ 矩阵 } L = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix}$$

的转置矩阵 L^T 与 L 的逆阵 L^{-1} 一致时, L 称为正交矩阵(orthogonal matrix)。关于正交矩阵有

$$l_{i1}l_{j1} + l_{i2}l_{j2} + l_{i3}l_{j3} = \delta_{ij}$$

$$l_{1i}l_{1j} + l_{2i}l_{2j} + l_{3i}l_{3j} = \delta_{ij}$$

式中 $i, j = 1, 2, 3$

$$\text{求证: } \delta_{ij} = \begin{cases} 1 (i=j \text{ 时}) \\ 0 (i \neq j \text{ 时}) \end{cases}$$

δ_{ij} 称为克罗内克 δ (Kronecker delta)。

1.4 两个矩阵 A, B 之积 AB 的转置矩阵 $(AB)^T$ 与它们各自矩阵的转置矩阵 A^T, B^T 的倒过来的乘积相等, 即

$$(AB)^T = B^T A^T$$

请根据下面的情况验证此式:

$$(a) \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix}$$

$$(b) \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

1.5 将用矩阵表示的三元一次联立代数方程式

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix}$$

的两边改写为转置矩阵的形式。

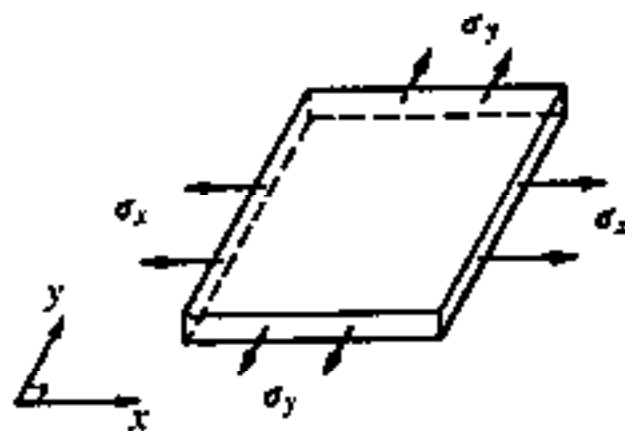


图 1.6 弹性平板的双向拉伸

1.6 将图 1.6 所示薄的长方形弹性平板的两边分别取为 x, y 方向。这个长方形平板因受到如图所示的沿 x, y 方向的均匀应力(平板侧面的每单位面积的作用力) σ_x, σ_y 作用而拉伸时, 在 x, y 方向产生的应变(平板在 x, y 方向的单位长度的伸长)。根据胡克定律(Hook's Law)可以用

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E & -\nu/E \\ -\nu/E & 1/E \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \end{Bmatrix}$$

给出, 式中 ν = 泊松比, E = 弹性模量是根据材料决定的常数。问: 这个式子变为应力解的形式

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \end{Bmatrix}$$

时, A, B, C, D 可以用怎样的式子给出。

1.7 取图 1.7 所示的弹性立方体的三个棱边为 x, y, z 方向。与该立方体的 x, y, z 成直角的面如图所示, 若各面上作用均匀应力 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$, 则 x, y, z 方向的立方体的应变 $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$ 根据胡克定律为

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E & -\nu/E & -\nu/E \\ -\nu/E & 1/E & -\nu/E \\ -\nu/E & -\nu/E & 1/E \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{Bmatrix}$$

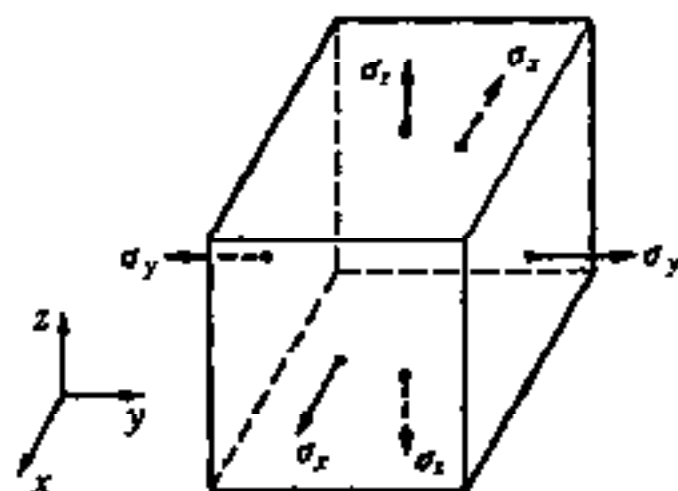


图 1.7 弹性立方体的三向拉伸

问: 这个式子变为应力解的形式时, $A, B, C, D, E, F, G, H, J$ 可以用怎样的式子给出?

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & C \\ D & E & F \\ G & H & J \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \end{Bmatrix}$$

1.8 如图 1.8 所示三个弹簧 a, b, c (弹性常数为 k_a, k_b, k_c) 串联时, 求作用在节点 1, 2, 3, 4 上的外力 F_1, F_2, F_3, F_4 与这些点的位移 u_1, u_2, u_3, u_4 之间的与式 (1.32) 形式相同的刚性方程式。

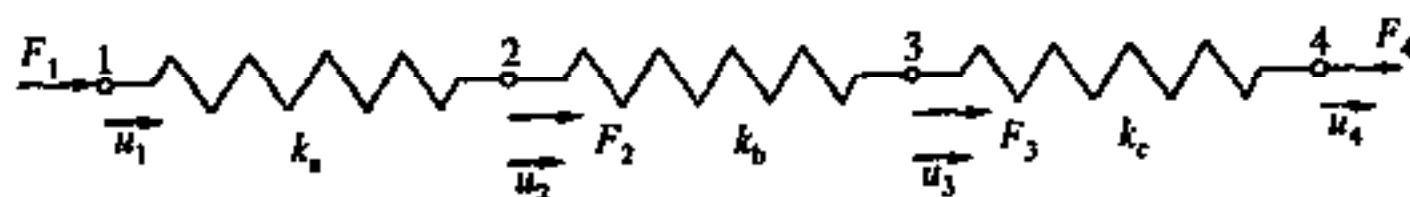


图 1.8 三个弹簧串联后的节点力与节点位移

1.9 在图 1.9(a) 的直流电路中, 若求得的电池的电压 V_1, V_2 与电流 I_1, I_2 的关系式为

$$\begin{Bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{Bmatrix}$$

问: 矩阵元素 A', B', C', D' 用电阻 R_1, R_2 该怎样表示? 同样在图 (b) 中设

$$\begin{Bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A'' & B'' \\ C'' & D'' \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_3 \\ I_3 \end{Bmatrix}$$

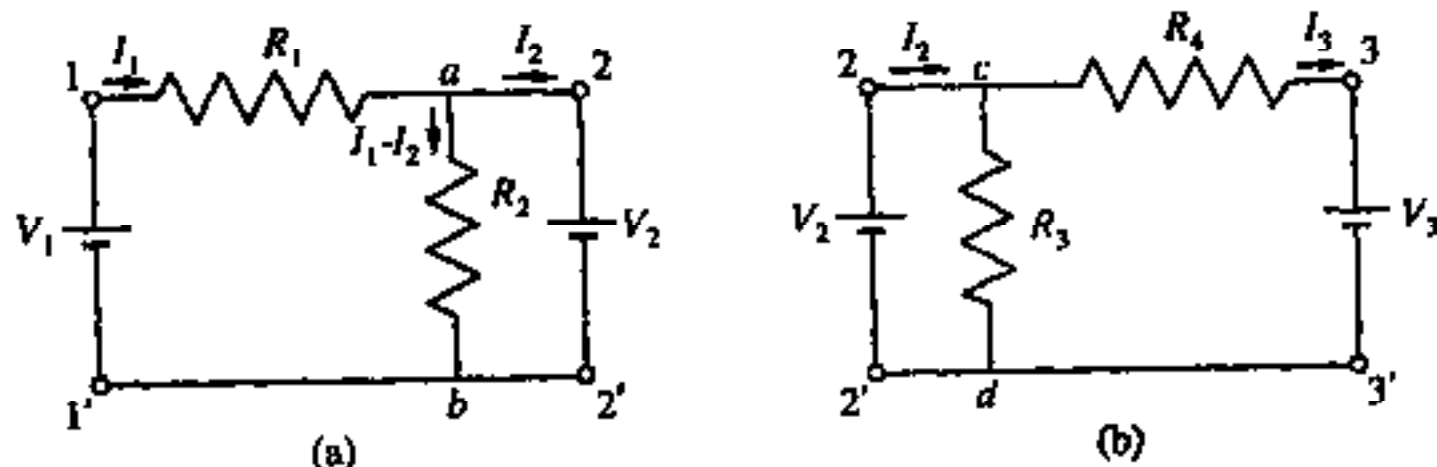


图 1.9

问: A'', B'', C'', D'' 用 R_3, R_4 该怎样表示?

[提示] 请用基尔霍夫定律(参照本章补遗 1.2)。

1.10 对于将图 1.9(a),(b)的回路串联连接后的图 1.10 的回路电压 V_1, V_3 和电流 I_1, I_3 的关系,可以在图 1.10 的回路中直接采用基尔霍夫定律以

$$\begin{Bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_3 \\ I_3 \end{Bmatrix}$$

的形式求得,请用 1.9 题的结果验证

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A'' & B'' \\ C'' & D'' \end{bmatrix}$$

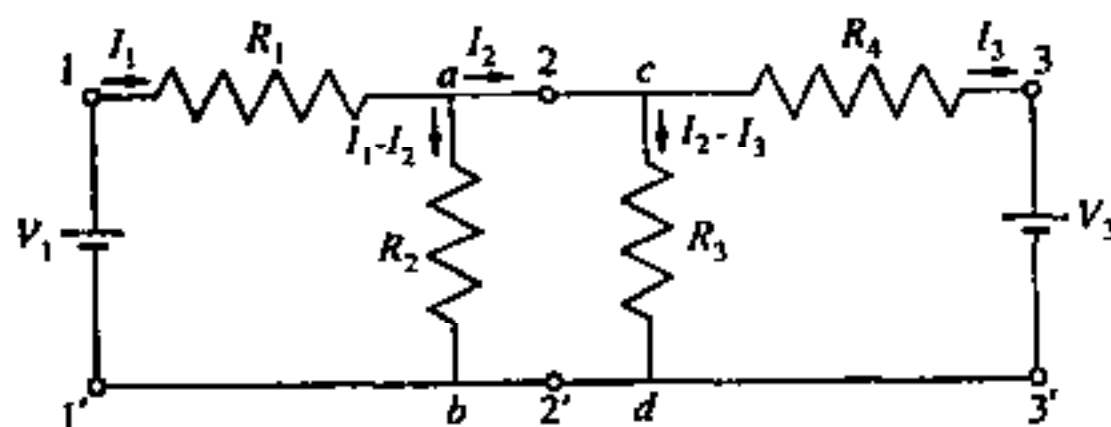


图 1.10

补 遗

1.1 用电子计算机求解联立多元一次代数方程式和计算逆阵

使用大型电子计算机时,在各计算中心应该预备了这样的程序,所以,可以读它们的菜单。对于 pasc 程序,也已经出版了很多参考书。^①

1.2 基尔霍夫定律

A. 第 1 定律

在电气回路的接点处,流入的电流的代数和为零(即流入的电流等于流出的电流——译者)。

例如,在图 1.9(a)的回路中,在 a 点,从 1 有 I_1 的电流流入 a,从 a 有 I_2 的电流流出,流向 2,设从 a 向 b 流出的电流为 I_{ab} ,根据第 1 定律,对流入的电流加“+”,流出的电流加“-”后求代数和

$$(+I_1) + (-I_2) + (-I_{ab}) = 0$$

$$\text{所以 } I_{ab} = I_1 - I_2$$

故,在图 1.9(a)中,流向 b 的电流可以被记为 $I_1 - I_2$ 。

B. 第 2 定律

在闭合回路中包含的电动势的代数和与电压降(电流×电阻)的代数和相等。

例如,在图 1.9(a)的闭合回路 122'1' 中

^① 小島,町田:パソコンBASIC 数值計算 I,東京大学出版会(1982)。玄,井田:数值計算プログラム(パソコンソフトウェアシリーズ)電気書院(1984)。米山,三木:数值計算入門,オーム社(1983)。

$$V_1 - V_2 = I_1 R_1$$

在 $labl'$ 中

$$V_1 = I_1 R_1 + (I_1 - I_2) R_2$$

式中,对于电动势,当闭合回路取向与电动势的方向相同时,加“+”号,方向相反时,加“-”号,然后取其代数和。电压降的符号也是当其方向与流入电阻的电流的方向相同时取“+”号,相反时取“-”号。^①

^① 末武(監修),松下電気工学院(編著),プログラム学習による基礎電気工学,直流編(電気基礎講座1),廣濟堂科学技術社(1975)。

第2章 矢 量

2.1 标量与矢量

如体积、质量、温度等,只具有大小的量称为标量(scalar),如位移、速度、加速度、

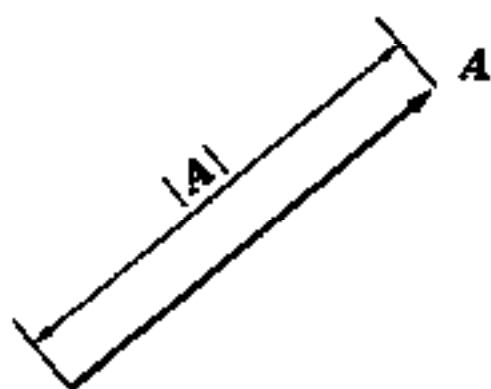


图 2.1 矢量和它的大小(绝对值)

力等不仅具有大小而且具有方向的量称为矢量(vector)。矢量可以用上面加箭头的拉丁字母或粗体字母表示,如 \vec{A} , \mathbf{A} 。另外,矢量还可以用如图 2.1 所示的一条有方向的线段,即有向线段表示,其长度取矢量 A 的大小(绝对值)。矢量 A 的大小可以用绝对值记号 $|A|$ 表示,在力学上还可以去掉 \vec{A} 的箭头用 A 来表示。当矢量的箭头的始点与终

点一致时,称为 A 的零矢量(zero vector),用 O 表示。由于标量只可以用来表示一个实数值,所以,其计算可以用通常的实数计算方法进行。而对于矢量,因为是由大小(绝对值)和方向决定的量,它不只是实数,所以其计算方法必须重新定义。定义方法不能随意确定,必须适合于工学或理学的诸问题的简便解决。这样的矢量的计算称为矢量解析(vector analysis)。以下各节将对其进行叙说。

2.2 矢量的相等、和、实数倍、差

如图 2.2 所示的两个矢量 A, B , 如果其大小相等,方向相同(即 $A \parallel B$ 且 A, B 的箭头的方向相同),就称为 A 与 B 相等。这种情况可以表示为

$$\mathbf{A} = \mathbf{B} \quad (2.1)$$

(两矢量相等的定义)。

如图 2.3(a)所示,给出两个矢量 A, B 时,如图(b)画出与 A 相等的矢量,再从 A 的箭头的前端作与 B 相等的矢量,然后从 A 的箭头的起点向 B 的箭头的终点作如图 2.3(b)所示的矢量 C , C 称为 A 与 B 之和。表示为

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{C} \quad (2.2)$$

(两个矢量之和的定义)。

如图(c),以与 B 相等的矢量的终点为起点作与 A 相等的矢量,可以求得 B 与 A

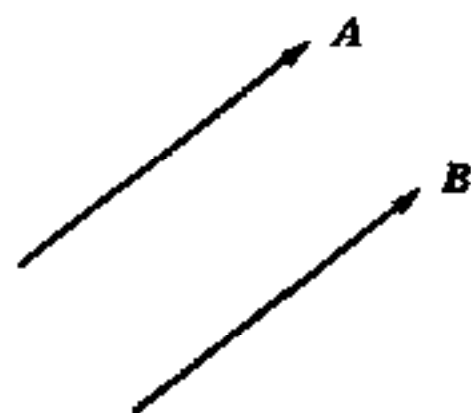
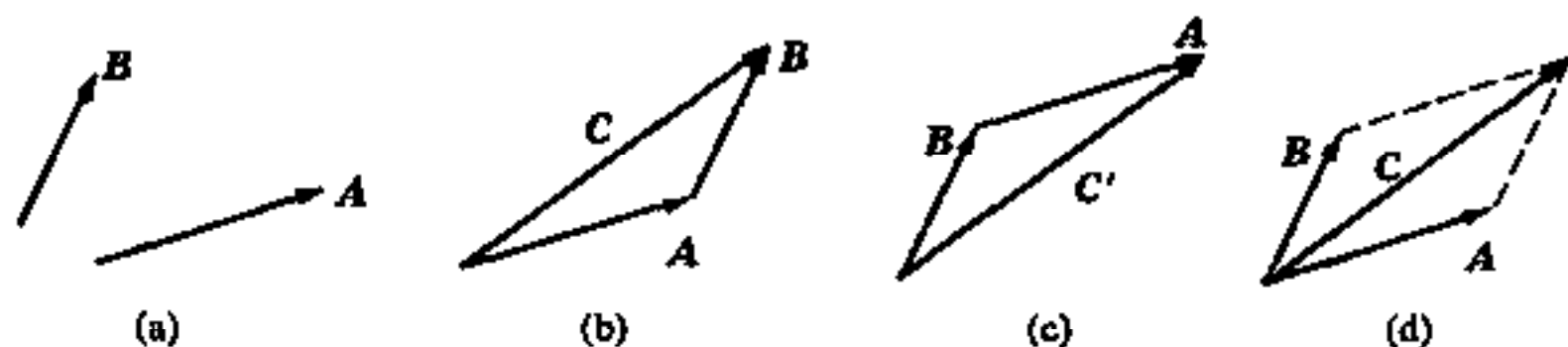


图 2.2 二矢量相等

图 2.3 两个矢量之和($A+B$)

之和为 C' , C 与 C' 相等(大小、方向均相等), 因此

$$A+B=B+A \quad (2.3)$$

式(2.3)称为矢量相加的交换律(commutative law)。

[问 2.1] 根据上面的 C 与 C' 相等证明交换律成立。

从上面的情况发现, 欲求矢量 A 与 B 之和, 如图 2.3(d) 可以用求 A, B 为二边组成的平行四边形的对角线 C 求得。(根据平行四边形求矢量之和的方法)。

[问 2.2] 如图 2.4 所示, 用矢量 A 表示的力(大小为 10N, 水平向右)与用矢量 B 表示的力(大小为 5N, 垂直向上)同时作用在一个点 P 时, 求用这些矢量之和表示的力 C (这个力称为 A 与 B 的合力)。

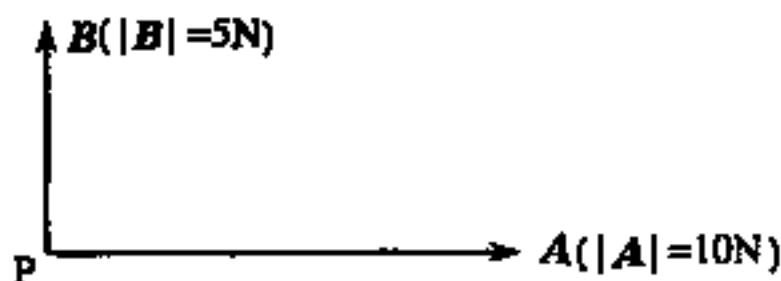


图 2.4

[提示] 用计算器求合力 C 的大小 $|C|$ 和方向(与水平方向的夹角)。另外, 用适当的比例作图求合力。将两种计算结果进行比较。

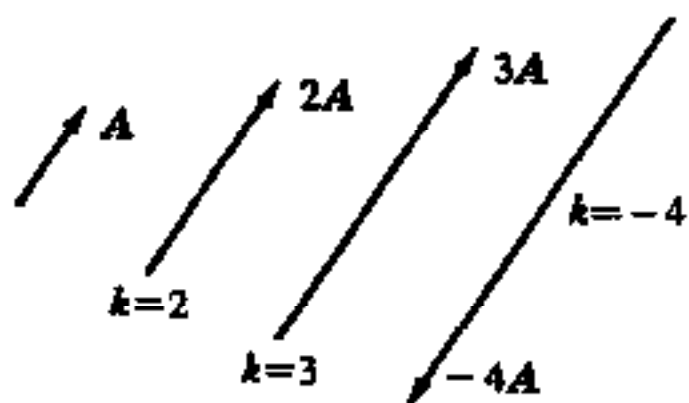
矢量 A, B, C 相加时

$$(A+B)+C=A+(B+C) \quad (2.4)$$

成立(矢量相加的结合律(associative law))。因此, 式(2.4)的左边与右边没有区别, 可以将它们仅记为

$$A+B+C$$

[问 2.3] 用作图法验证式(2.4)。

图 2.5 矢量的标量倍(kA)

给出一个矢量 A 时, 其实数(标量)倍的矢量 kA (k =实数), 是矢量 A 的大小 $|A|$ 的 $|k|$ 倍大小且与 A 平行的矢量; 若 $k>0$, 这个矢量与 A 同向; 若 $k<0$, 这个矢量与 A 反向。要是 $k=0$, kA 就是零矢量 O 。图 2.5 中表示的是 $k=2, 3, -4$ 时的例子。当 $k=-1$ 时, $kA=(-1)A$ 可以简写为 $-A$ 。同样, $k=-4$ 时, $kA=(-4)A$ 可以简写为 $-4A$ 。 k 为其

他负数时也可同样表示。

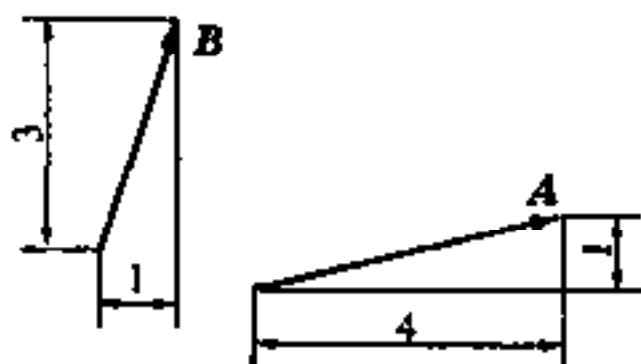


图 2.6

[问 2.4] 如图 2.6 给出 A, B 时, 作下面的矢量图。

(a) $2A + 3B$ (b) $2A + (-3)B$

[问 2.5] 给出适当的数值 a, b 作为矢量的实数倍, 通过作图验证下列各式成立。

(a) $(a+b)A = aA + bA$

(b) $a(A+B) = aA + aB$

(c) $a(bA) = (ab)A$

这里, (a), (b) 是矢量的实数倍的分配律 (distributive law), (c) 是结合律。

[提示] 验证将式子左、右两边分别作图所得的结果是否相等。

给出如图 2.7 所示两个矢量 A, B 时, A 与 $-B$ (同图(b)) 之和 C (同图(c)或(d)) 写为 $A - B$, 称为 A 与 B 的差。即

$$A - B \equiv A + (-B) \quad (2.5)$$

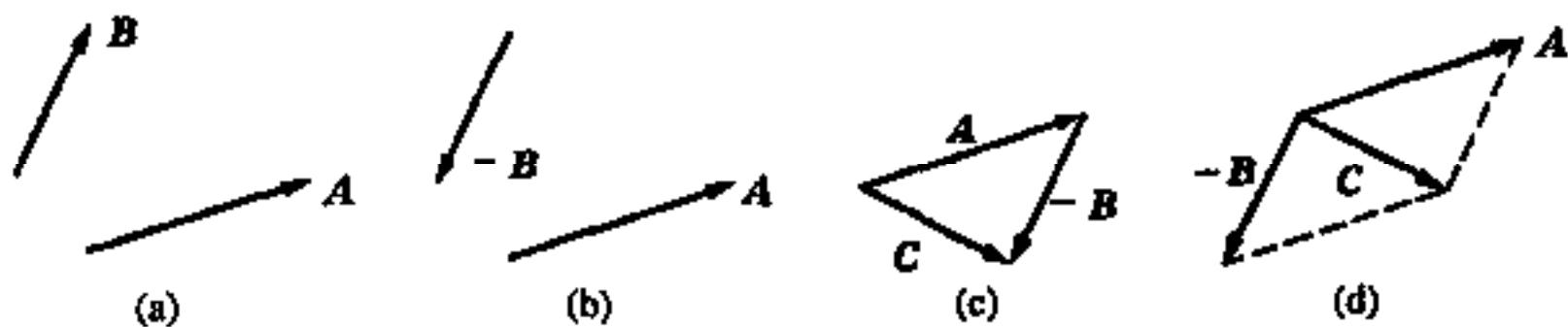


图 2.7 两个矢量之差 ($A - B$)

[问 2.6] 给出 A, B, C 时, 作图表示下面的矢量。

(a) $A - B$ (b) $3A - B - C$

2.3 矢量之和在工程力学中的应用

A. 作用在一点上的三个力的平衡 (拉密定理)

如图 2.8(a) 所示, 作用在一点上的三个力 P_1, P_2, P_3 符合平衡条件, 这三个力的合力, 即这三个力的矢量和为零矢量。换言之, 如图(b)所示, 矢量 P_1, P_2, P_3 所围成的力三角形是封闭的。

这个三角形的内角, 由图 2.8(a), (b) 的比较得知分别为: $180^\circ - \alpha, 180^\circ - \beta, 180^\circ - \gamma$, 根据正弦定理 (补遗 2.1 式(2.35)) 得

$$\frac{P_1}{\sin(180^\circ - \alpha)} = \frac{P_2}{\sin(180^\circ - \beta)} = \frac{P_3}{\sin(180^\circ - \gamma)}$$

从三角函数公式 $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$

得
$$\frac{P_1}{\sin \alpha} = \frac{P_2}{\sin \beta} = \frac{P_3}{\sin \gamma} \quad (2.6)$$

上式称为拉密定理(Lami's theorem)

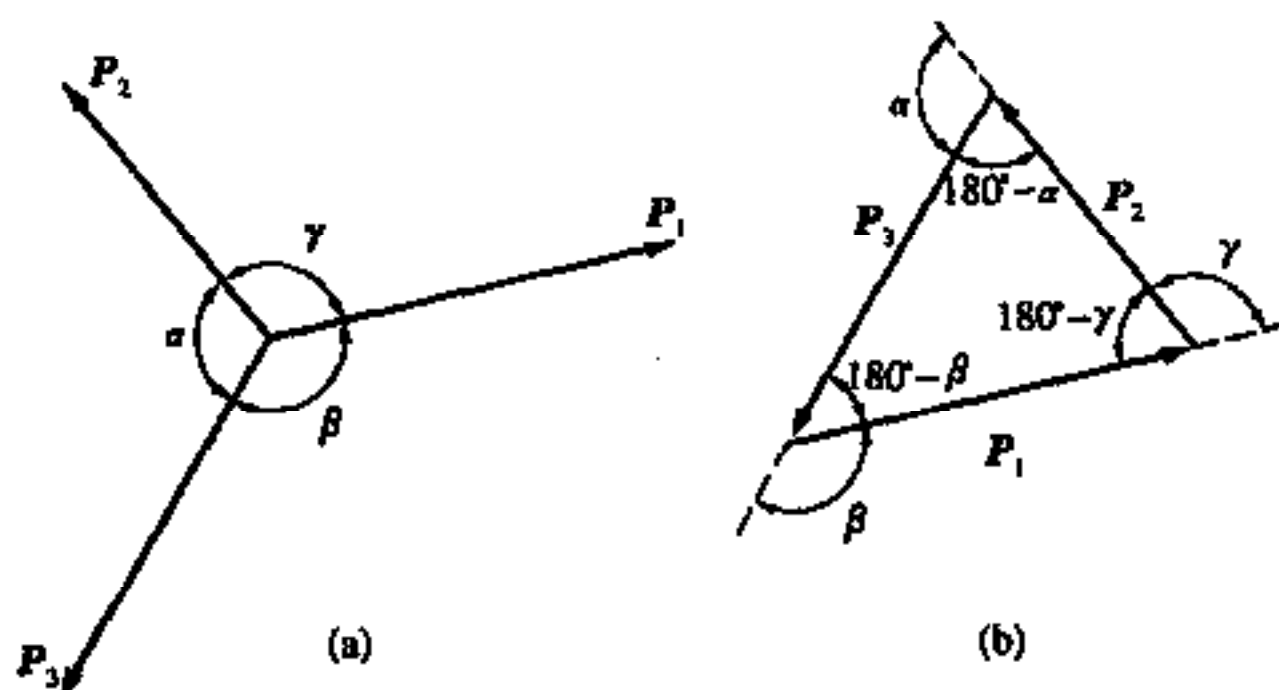


图 2.8 作用于一点的三个力的平衡

[问 2.7] 如图 2.9 重 200N 的物体吊在以 A, B 两点引出的绳索 OA, OB 上。当 OA, OB 与水平线的夹角为 $30^\circ, 45^\circ$ 时, 绳索 OA, OB 的张力分别为多大?

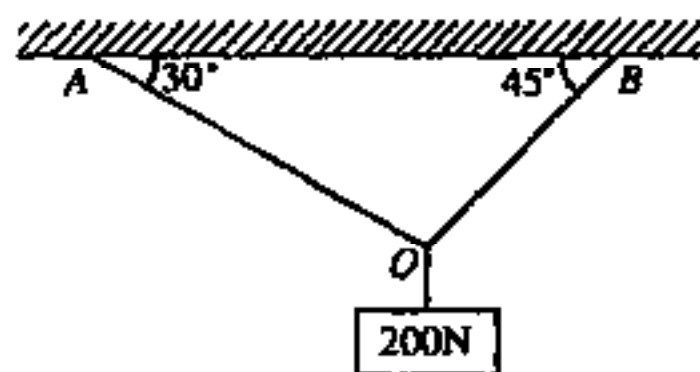


图 2.9

B. 克雷莫纳应力图

将许多细长杆状物体的两端互相连接后组成的结构物称为框架(frame work)。组成框架的各个杆状物体称为杆件(member), 杆件的结合点称为节点(panel point)。作为节点, 都将其理想化地处理为可转动的即铰节点(hinged point)或者杆件都互相固定的刚节点(rigid joint)。全部节点都为铰节点的框架称为桁架(truss), 全部或者包含部分刚节点的框架称为刚架(Rahmen)。

下面讨论外力作用于桁架上时, 用图解法求作用在各杆上的力, 即各杆的内力(internal force)(也称应力^①(stress))的方法。以图 2.10(a)所示起重机的桁架为例

^① 在材料力学中所言的应力是把在此所言的内力除以截面积的量, 但是往往也把内力称为应力。

说明。从承受荷载的前端节点 1 开始。作用在节点 1 的 500N 外力可以向汇集于节点 1 的两个杆件 $\overline{12}$, $\overline{14}$ 方向分解。这种情况, 分解图如图 2.10(c) 的三角形 abc。它是以代表作用在节点 1 的 500N 的荷重 \vec{ab} 的箭端接上 \vec{bc} , 再从 \vec{bc} 的箭头端部接上 \vec{ca} 而形成的闭合的三角形。这种情况为了实际作图, 可从 b 作杆件 $\overline{14}$ 的平行线, 另外从 a 作杆件 $\overline{12}$ 的平行线, 这它们的交点正好为 c。这个图中的力 \vec{bc} 就是杆件 $\overline{14}$ 作用在节点 1 上的内力^①, \vec{ca} 就是杆件 $\overline{12}$ 作用于节点 1 上的内力, \vec{ab} 则是已经给出的荷重。

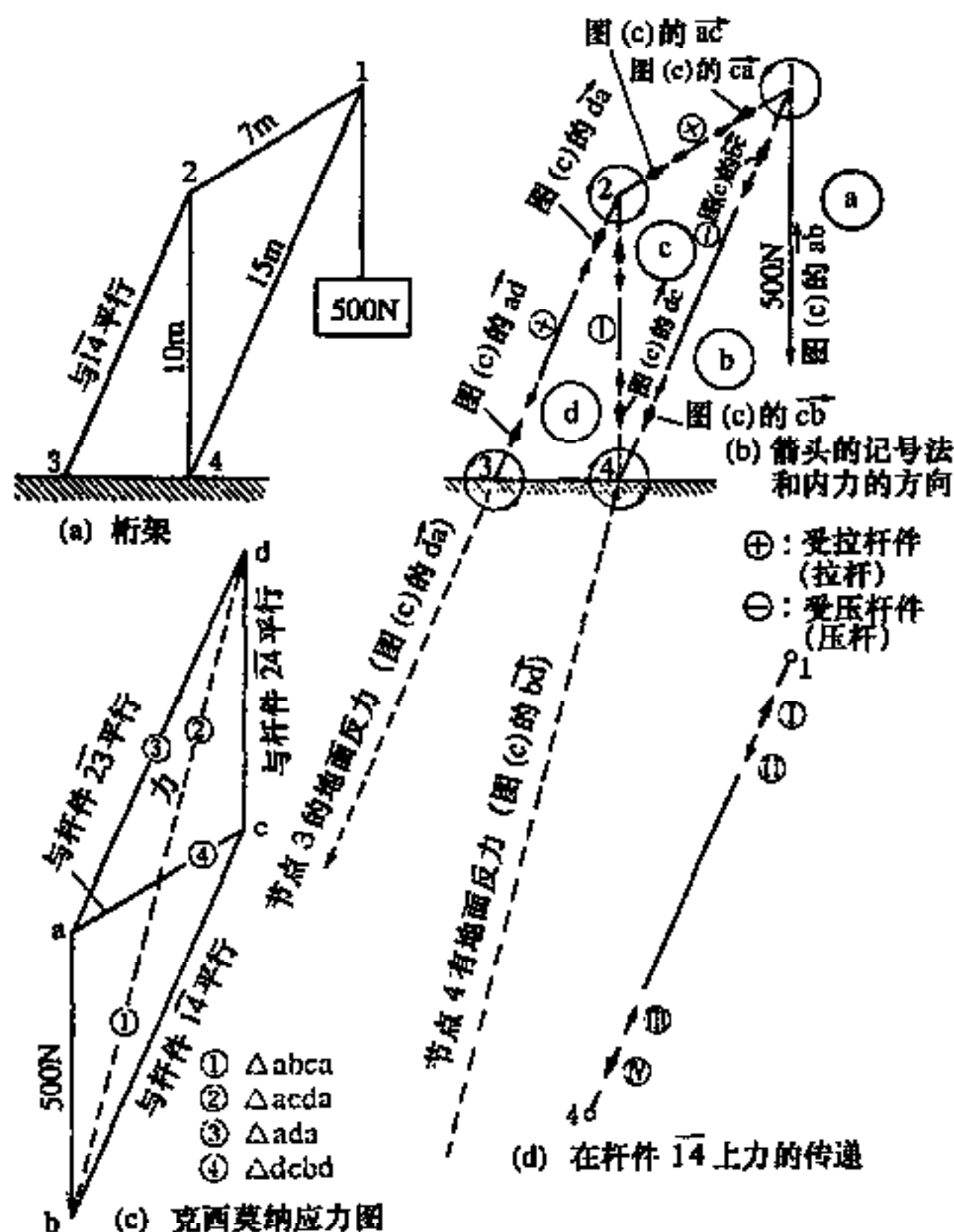


图 2.10 简单起重机的桁架图解应力分析

$\triangle abc$ 表示作用在节点 1 上的三个力保持静平衡。即用作三角形 abc 的图形可以求得 \vec{ab} , \vec{bc} , \vec{ca} 三个力的合力(它们都是作用于节点 1 的力)。从 abc 闭合的情况可以看

① 在图 2.10(b) 中大的箭头表示。

出,作用于节点1的合力为零($\vec{ab} + \vec{bc} + \vec{ca}$ 的矢量和为零矢量),节点1处于静平衡状态。下面将杆12由前面所记的 \vec{ca} 的反作用力,即力 \vec{ac} 作用在节点2上。同样,将杆14作为 \vec{bc} (杆14作用在节点1上的力)的反作用力,即力 \vec{cb} 作用在节点4上。^①下面分析作用在节点2上的力的平衡。在节点2,三个杆12,23,34相交,这三个杆给予节点2的力中,杆12作用于节点2的力,根据上面的叙述,由图2.10(c)中的 \vec{ac} (也可以在图(b)中,作出图(c)的 \vec{ac} 来表示)来给出,作图到此,14杆件的内力成为已知。因此,这个 \vec{ac} 向着还不知道内力的两根杆23,24的两个方向分解。这种情况,分解的作图也可以用前面对节点1进行的同样方法进行,如图2.10(c)的 $\triangle acd$ 所示,从 \vec{ac} 的箭端接上 \vec{cd} ,从 \vec{cd} 的箭头端部接上 \vec{da} ,成为封闭三角形。在实际作图时,从c作杆件24的平行线,又从a作杆23的平行线,设它们的交点恰好为d。图中的 \vec{ac} 是杆12作用在节点2上的内力, \vec{cd} 是杆24作用在节点2上的内力, \vec{da} 是杆23作用于节点2上的内力。因为这三个力的合力可以用 $\vec{ac} + \vec{cd} + \vec{da}$ 给出,故从 $\triangle acd$ 闭合的情况,可以用零矢量给出它们的合力,这三个力平衡,所以节点2保持静止不动。下面,将杆23作为 \vec{da} (杆23作用在节点2上的力)的反作用力,即力 \vec{ad} 作用于节点3。在节点3,与力 \vec{ad} 平衡的力 \vec{da} 从地面对节点3作用,杆23作用于节点3的内力 \vec{ad} 与地面作用于节点3的地面反力(reaction) \vec{da} 互相平衡。反力 \vec{da} 正如不能将杆23从地面拔出那样,是结实的地面所受的拉力。对于节点4,杆24作用于节点4的内力 \vec{dc} 、杆14作用于 \vec{cb} 的内力与作用在节点4的地面反力互相平衡。因此,对节点4作用的地面反力是与内力 \vec{dc} 、 \vec{cb} 平衡的力,且为了与 \vec{dc} 、 \vec{cb} 形成共同的闭合的三角形,可以称其为 \vec{bd} 。这个反力,在节点4正如结构物不会沉入地面那样,是地面支撑结构物的力。

进行以上作图时,如图2.10(b)所示,在被各杆和各荷重分开的空间内,加上②,③,④的符号。为了表示一个杆的内力,用 \odot 的顺序在图中记入该杆两侧空间的记号。

例如,考虑作用在节点1上的作用力的平衡时,对于杆12其两侧空间的记号c及a按节点 \odot 回转的顺序为 \vec{ca} ,用它表示杆12作用于节点1的力。因此,对于图2.10(c)在各自的内力(应力)矢量的两端,桁架图即如图2.10(b)的空间应该记入记号。

^① 在此,涉及到通过杆件的力传入的方面。在图2.10(d)中,从杆件14对节点1作用①的内力(这些同图(c)中的 \vec{bc})。作为其反作用,在杆件14上也受到节点1与其大小相同、方向相反的力①(图(c)中的 \vec{cb})。为了杆件14的平衡,在杆件14的另一端必须作用与①大小相同、方向相反的力①(图(c)中的 \vec{bc})。作为这①的反作用,在节点4上,受到杆件14与①大小相等、方向相反的力①(图(c)中的 \vec{cb})。在图(d)中,在节点上受到杆件的力用大的箭头画出。这些在图(b)中也是相同的。克西莫纳的应力图表示各节点受到从杆件作用的力(图(b),(d)中的大的箭头)和加在节点上的外力或地面反力的平衡。也要经常注意考虑节点受到这种各式各样力作用时节点滑套(销钉轴)的销钉的平衡。

$$A_x = A_x i, A_y = A_y j, A_z = A_z k \quad (2.8)$$

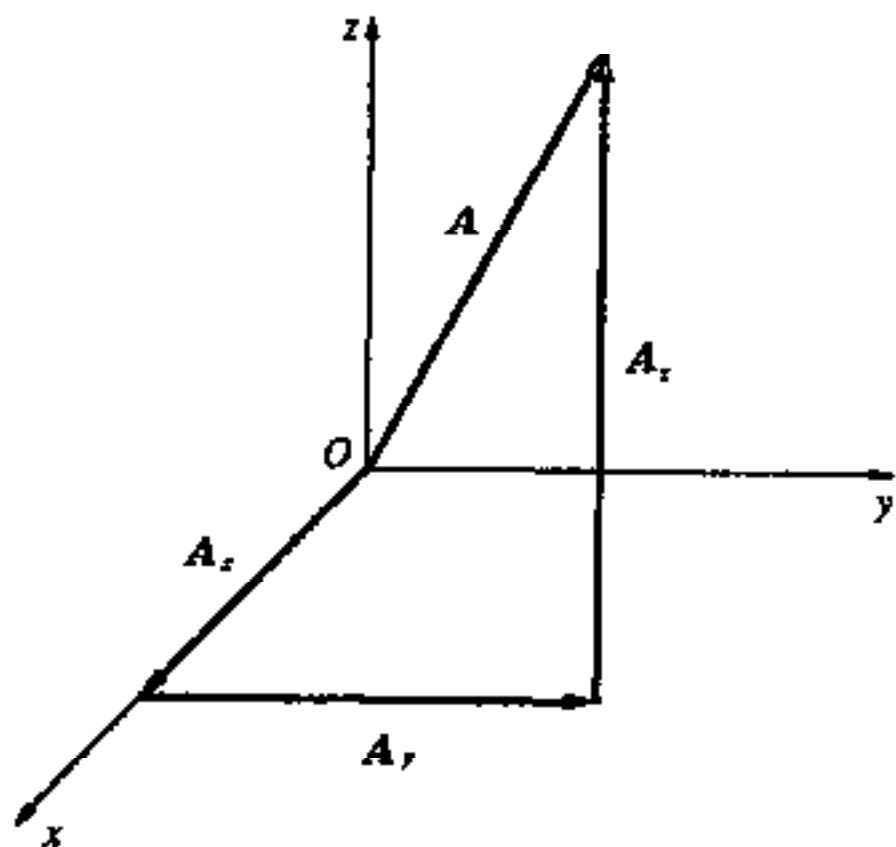


图 2.12 矢量的坐标轴方向的分量

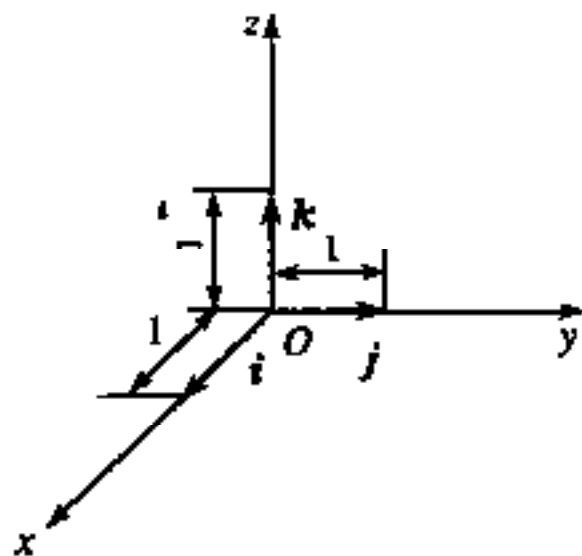


图 2.13 坐标轴方向的单位矢量

i, j, k 称为基本矢量(fundamental vector)。这里 A_x, A_y, A_z 是正负实数或零, 可以称为矢量 A 的 x, y, z 分量(x, y, z -components)。将式(2.8)代入式(2.7)得

$$A = A_x i + A_y j + A_z k \quad (2.9)$$

这就是矢量 A 的解析表达式(analytical expression)。若用这样的表示形式, 可以给出两个矢量的和、差以及一个矢量的实数倍分别如下:

$$A \pm B = (A_x \pm B_x)i + (A_y \pm B_y)j + (A_z \pm B_z)k \quad (2.10)$$

$$aA = (aA_x)i + (aA_y)j + (aA_z)k \quad (2.11)$$

[问 2.9] 有 A, B 两个矢量时, 将它们分别乘以常数 a, b 后再相加, 所得的 $aA + bB$ 称为 A 与 B 的一次结合或线性结合(linear combination)。请写出这个一次结合的解析表达式。

如图 2.14 所示, 若用三平方定理, 取 A 在 x, y 面的投影长度为 A' , 则

$$|A|^2 = A'^2 + A_z^2$$

$$A'^2 = A_x^2 + A_y^2$$

将后者代入前者开平方得

$$|A| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \quad (2.12)$$

下面, 如图 2.15 所示, 设矢量 A 的方向与 x, y, z 轴的夹角分别为 α, β, γ 时, 用 l, m, n 表示它们的余弦, 称为矢量 A 的方向余弦(direction cosine)。即

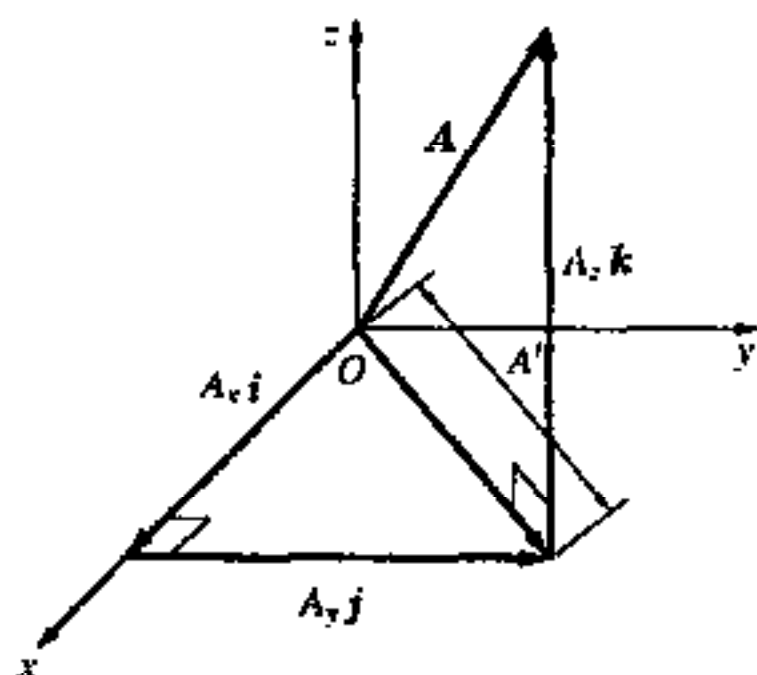


图 2.14 用矢量的坐标轴方向分量的单位矢量表示

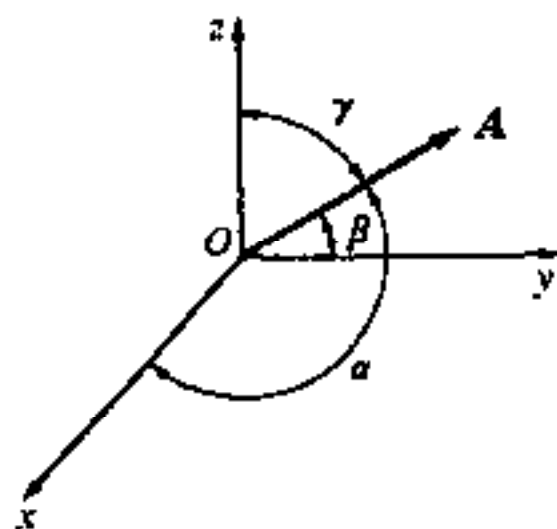


图 2.15 矢量的方位角

$$\left. \begin{aligned} l = \cos \alpha &= \frac{A_x}{|A|} = \frac{A_x}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}} \\ m = \cos \beta &= \frac{A_y}{|A|} = \frac{A_y}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}} \\ n = \cos \gamma &= \frac{A_z}{|A|} = \frac{A_z}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}} \end{aligned} \right\} \quad (2.13)$$

[问 2.10] 对于方向余弦 l, m, n , 试证明下式成立。

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1 \quad (2.14)$$

[问 2.11] 设矢量 A 方向的单位矢量为 N 时, 求证 N 的 x, y, z 分量与矢量 A 的方向余弦相等。

2.5 矢量的内积

以图 2.16 为例, 在沿没有摩擦的导轨 RR' 微小物体 P 上, 作用一个与导轨方向不一定一致的力 A , 这个微小物体(质点) P 从导轨上的 O 点移动到了 C 点, 矢量 \overrightarrow{OC} 就称为物体 P 的位移(displacement), 为了简单起见, 可以用 B 表示 \overrightarrow{OC} 。这时, 作用在物体 P 上的力 A 可以分解为沿导轨方向的力 A_t 和与导轨垂直方向的力 A_n 。即

$$A = A_t + A_n \quad (2.15)$$

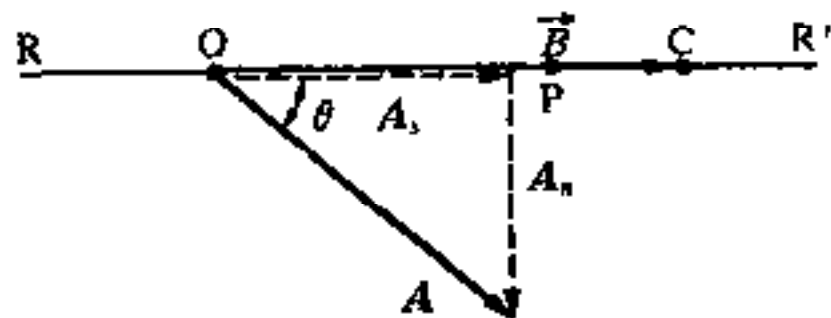


图 2.16 加在沿导轨运动着的微小物体上的力和位移

对物体 P 施加力 A 而引起位移 B 时, 对使物体 P 从 O 移动到 C 起作用的仅仅是 A 中的 A_t , 而 A_n 只是在导轨的侧面压紧物体 P , 它对把 P 从 O 移动到 C 后起作用。因此, 这种情况物体所做的功 W 为

$$W = |A| |B| \cos \theta = (|A| \cos \theta) |B| = |A| |B| \cos \theta \quad (2.16)$$

式中的 θ 是 A, B 间的夹角。

不限于这个例子, 当两个矢量 A, B 有夹角 θ 时, 这两个矢量的大小 $|A|, |B|$ 及矢量间夹角 θ 的余弦的乘积, 称为两个矢量 A, B 的内积(inner product)或数量积(scalar product), 用 $A \cdot B$ 表示。即

$$A \cdot B = |A| |B| \cos \theta = |B| |A| \cos \theta = B \cdot A \quad (2.17)$$

从上式可见, 对于矢量的内积, 交换法则成立。另外, 内积因为是用如式(2.17)那样在两个矢量记号 A, B 之间写上 \cdot (点) 来表示, 所以也可以称为点积(dot product)。

由上可知, 物体 P 因受力 A 作用而产生 B 位移时, 从式(2.16)物体所做的功 W , 可以用力 A 与变位 B 的内积 $A \cdot B$ 给出。

[问 2.12] 验证内积 $A \cdot B$ 与 $|A|$ 和 B 在 A 上的投影的积或 $|B|$ 和 A 在 B 上的投影之积相等。

因为 A 与 A 的内积为

$$A \cdot A = |A| |A| \cos 0 = |A|^2 \quad (2.18)$$

可以用 A^2 表示, 所以称为 A 的模方(norm)。

关于内积, 如下的分配律成立:

$$(A+B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C \quad (2.19)$$

这种情况从 A 与 B 之和的矢量在 C 上的投影与 A 在 C 上的投影与 B 在 C 上的投影之和相等, 可以很容易地被理解。

[问 2.13] 通过作图验证上面的情况。

[问 2.14] 对于内积证明下式成立。

$$(a) (A+B+C) \cdot D = A \cdot D + B \cdot D + C \cdot D$$

$$(b) (A+B) \cdot (C+D) = A \cdot C + B \cdot C + A \cdot D + B \cdot D$$

另外, 下面的运算法则

$$(aA) \cdot B = A \cdot (aB) = a(A \cdot B) \quad (2.20)$$

也成立。

[问 2.15] 验证式(2.20)成立。

i, j, k 是 x, y, z 方向的基本矢量, 由于它们为互相正交的单位矢量(大小为 1 的矢量), 所以, 对于它们的内积, 下式成立:

$$\left. \begin{aligned} i^2 = i \cdot i = 1, j^2 = j \cdot j = 1, k^2 = k \cdot k = 1 \\ j \cdot k = k \cdot j = 0, k \cdot i = i \cdot k = 0, i \cdot j = j \cdot i = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.21)$$

当给出 A, B 两个矢量的解析表示式

$$\left. \begin{aligned} A &= A_x i + A_y j + A_z k \\ B &= B_x i + B_y j + B_z k \end{aligned} \right\} \quad (2.22)$$

时, A 与 B 的内积由式(2.19), 式(2.20), 式(2.21)得:

$$\begin{aligned} A \cdot B &= (A_x i + A_y j + A_z k) \cdot (B_x i + B_y j + B_z k) \\ &= A_x B_x i \cdot i + A_x B_y i \cdot j + A_x B_z i \cdot k \\ &\quad + A_y B_x j \cdot i + A_y B_y j \cdot j + A_y B_z j \cdot k \\ &\quad + A_z B_x k \cdot i + A_z B_y k \cdot j + A_z B_z k \cdot k \\ &= A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \end{aligned} \quad (2.23)$$

[问 2.16] 根据式(2.19), 式(2.20), 式(2.21), 对在式(2.23)中式子的变化顺序进行合理性的证明。

矢量 A 与 B 互相垂直时,

$$A \cdot B = |A| \cdot |B| \cos 90^\circ = 0$$

反之, 若不是零矢量, 对于 A, B 有 $A \cdot B = 0$, 则

$$|A| \cdot |B| \cos \theta = 0, \quad \cos \theta = 0$$

$$\theta = 360^\circ \times n \pm 90^\circ \quad (n \text{ 为正负的整数}, 0)$$

所以 A 与 B 垂直。即不是零矢量时 A 与 B 垂直的必要充分条件是

$$A \cdot B = 0 \quad (2.24)$$

或者将其代入式(2.23), 也可以写成:

$$A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z = 0 \quad (2.25)$$

[问 2.17] 证明两个矢量 A 与 B 的夹角 θ 的余弦 $\cos \theta$, 可以用下式给出:

$$(a) \cos \theta = \frac{A \cdot B}{|A| |B|} \quad (2.26)$$

$$(b) \cos \theta = \frac{A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}} \quad (2.27)$$

$$(c) \cos \theta = l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 \quad (2.28)$$

式中, l_1, m_1, n_1 与 l_2, m_2, n_2 分别是 A 与 B 的方向余弦。

2.6 矢量的外积

如图 2.17, 将直线 XY 作为铰链的轴, 考察绕轴旋转的门 $EFGH$ 。从门的手柄 P 的中心作 XY 的垂线相交于 Q , 用 A 表示矢量 \overrightarrow{QP} , 将其称为力臂的矢量, 通常给予手柄 P 的中心一个用不在门的平面内的矢量表示的力 B , 使门朝前转动 (图 2.17(a) 或 (b))。俯视图是图 2.18(a), (b)。这时, 绕转轴 XY 转动的力矩 M 的大小, 若设矢量 A 的方向与 B 的方向间的夹角为 θ 时, 可以用下式给出:

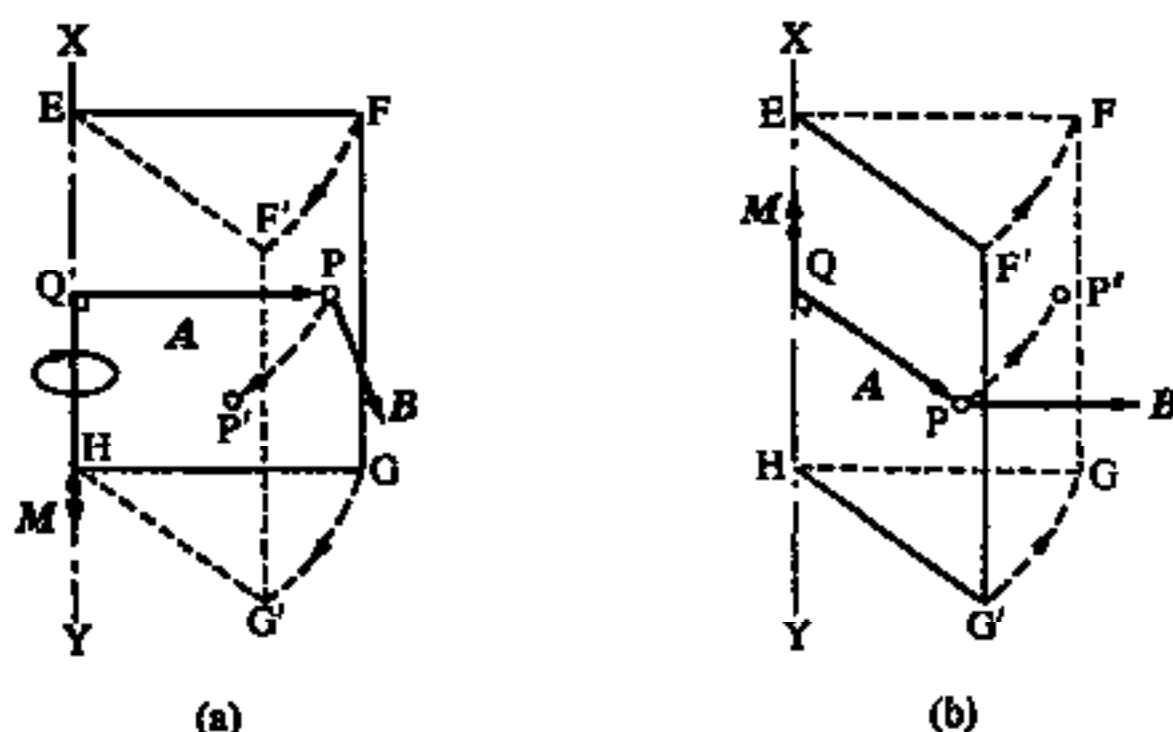


图 2.17 转动门时的力臂, 力, 力矩的示意图

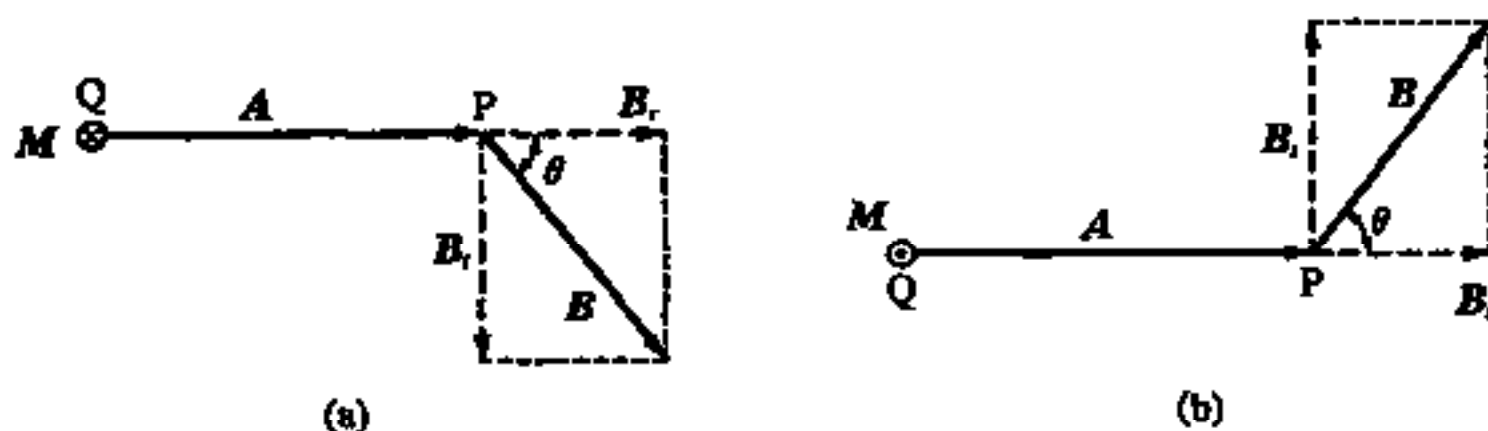


图 2.18 转动门时的力臂, 力, 力矩的平面图

$$M = |A| |B| \sin \theta \quad (2.29)$$

式中, 力矩的转向, 对于图 2.17(a), 2.18(a) 俯视时是顺时针方向, 对于相同图号的 (b), 则是逆时针方向。这些力矩往往用 M 表示。对于力矩的回转, 根据右手螺旋方向来考察 M 的方向, 其大小可以取力矩的大小 M° , 即 $|M| = M$ 。对力矩矢量, 往往如图 2.17 所示, 用带有两个箭头的线来表示。这时可表示为

$$A \times B = M$$

① 图 2.18 中的 \otimes 记号, 表示垂直于底面从外向里的矢量, \odot 记号表示垂直于底面从里向外的矢量。 \otimes 记号表示从外向里的矢尾的 4 片羽毛所能见的部分, \odot 表示从里向外的矢头的圆锥形的尖峰。

上式的意义是在经过门轴,并用 A 矢量所表示的力臂处的手柄 P 上加上力 B ,则可说用力矩矢量 M 来表示的力矩作用于门上。这时

$$|M| = M = |A| |B| \sin\theta = (\text{以 } AB \text{ 为两个边的平行四边形的面积}) \quad (2.30)$$

验证这些,表示于图 2.19 中。

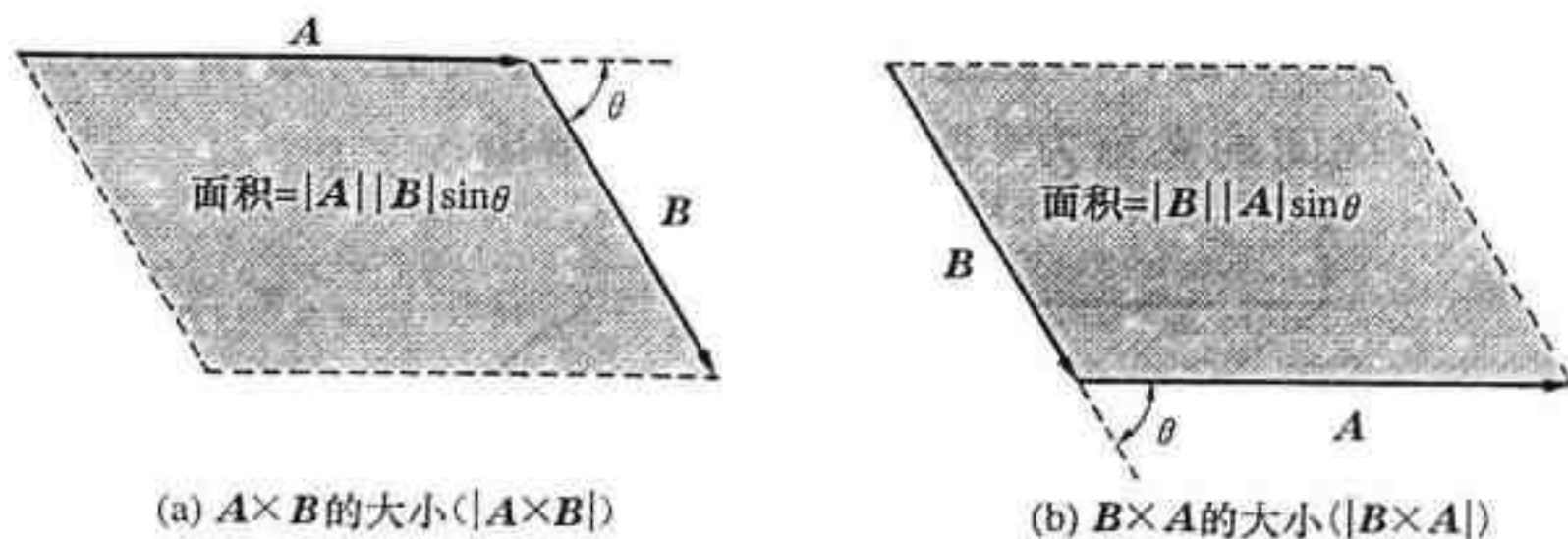


图 2.19 A 和 B 外积的大小

不只限于这个例子,一般地有两个矢量 A, B ,以将 A, B 为两边的平行四边形的面积作为大小,对于由假想以 A 为力臂,以 B 为力时的力矩的回转,将以右手螺旋为方向的矢量 C (相当于前面所写的 M) 称为 A 和 B 的外积 (exterior product) 或矢积 (vector product),写成

$$C = A \times B \quad (2.31)$$

因为上式右边可以读作“ A 叉 B ”,所以外积也可称为叉积 (cross product)。由此可得

$$|C| = |A| |B| \sin\theta$$

另外比较图 2.17,图 2.18 的(a)与(b)可知

$$A \times B = -(B \times A) \quad (2.32)$$

对于外积,由于乘的顺序不同,所以作为结果所得到的矢量也不同(若乘的顺序相反,得到结果的矢量方向正好相反——但是大小相同),这一点必须注意。即对于数量(仅是实数)相乘、矢量 A 与 B 的内积相等,如

$$2 \times 3 = 3 \times 2, \quad ab = ba, \quad A \cdot B = B \cdot A$$

那样,交换律成立,但对于矢量的外积,一般而言 $A \times B \neq B \times A$,交换律就不成立。

[问 2.18] 验证下列各式成立

(a) $A \times A = 0$ (0 为零矢量)

(b) $(aA) \times B = A \times (aB) = a(A \times B)$

[提示] 对于(b)通过作图比较各边来分析。

[问 2.19] x, y, z 轴方向的单位矢量为 i, j, k , 证明下列各式成立。

- (a) $i \times i = 0$ (b) $j \times j = 0$
 (c) $k \times k = 0$ (d) $j \times k = i$
 (e) $k \times i = j$ (f) $i \times j = k$
 (g) $k \times j = -i$ (h) $i \times k = -j$
 (i) $j \times i = -k$

[问 2.20] 如图 2.20 所示, 已知矢量 A 与 C 时, 设 A 在与 C 垂直的平面 Π 上的投影后的矢量作为 A' , 求证

$$A \times C = A' \times C$$

对于矢量的外积, 分配律成立, 即

$$(A+B) \times C = A \times C + B \times C \quad (2.33)$$

(证明) 如图 2.21(a), 设矢量 A, B 及 $A+B$ 在与 C 垂直的平面 Π 上的投影为 $A', B', A'+B'$, 根据[问 2.20]的结果得:

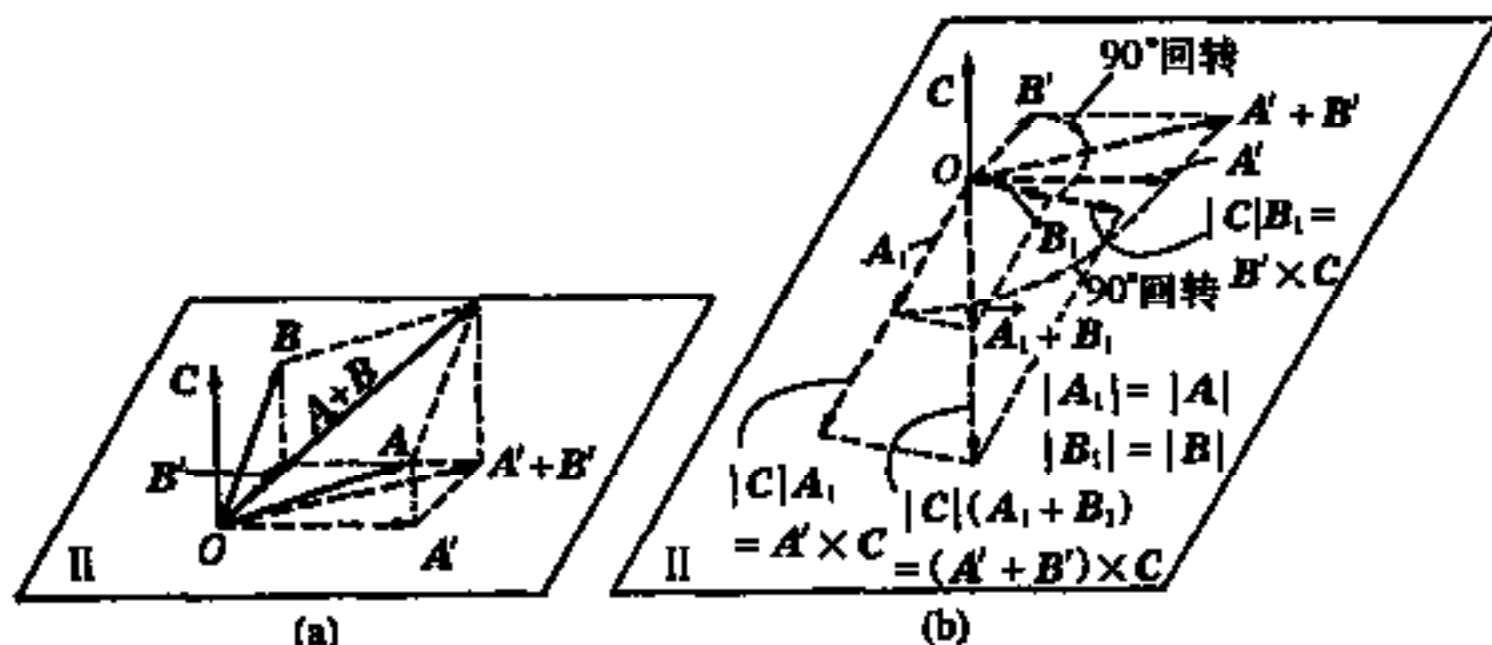


图 2.21 在矢量外积上的分配律

$$\left. \begin{aligned} A \times C &= A' \times C, & B \times C &= B' \times C \\ (A+B) \times C &= (A'+B') \times C \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

根据外积的定义 $A' \times C$ 是如图 2.21(b), 将 A' 考虑为力臂, C 考虑为力时的矢量矩, 这是从平面 Π 的正上面(朝着 C 矢量的箭头侧)往下看到的 A' 矢量, 以顺时针回转 90° 后的矢量 A_1 的 $|C|$ 倍的情况。同样, $B' \times C$ 是由平面 Π 的正上面俯视所见 B' 的矢量, 以顺时针转 90° 后的矢量 B_1 的 $|C|$ 倍, $(A'+B') \times C$ 也是从平面 Π 的正上面俯视所见 $A'+B'$ 的矢量, 以顺时针转 90° 后的矢量 A_1+B_1 的 $|C|$ 倍。如图 2.21, 同原来一样, 因为 $A'+B'$ 是以 A' 与 B' 为两边的平行四边形的对角线, 所以将它们从正上面俯视而所见的全部, 同时以顺时针方向旋转 90° 后一律乘以 $|C|$ 倍所得的 $(A'+B') \times$

C , 就是以 $A' \times C$ 与 $B' \times C$ 为两边的平行四边形的对角线。因此, 矢量 $(A' + B') \times C$ 等于矢量 $A' \times C$ 与 $B' \times C$ 之和, 即

$$(A' + B') \times C = A' \times C + B' \times C \quad (b)$$

将式(a)代入式(b), 分配律即式(2.33)成立。

(证毕)

[问 2.21] 说明下面的理由

(a) $A \times (B \times C)$ 位于由 B 与 C 决定的平面中。

(b) 结合律对外积(一般地)不一定成立。即

$$A \times (B \times C) \neq (A \times B) \times C$$

下面求两个矢量 A, B 的外积的解析表达式。如设

$$A = A_x i + A_y j + A_z k$$

$$B = B_x i + B_y j + B_z k$$

则由式(2.33)与[问 2.18](b)得

$$\begin{aligned} A \times B &= (A_x i + A_y j + A_z k) \times (B_x i + B_y j + B_z k) \\ &= A_x B_x (i \times i) + A_x B_y (i \times j) + A_x B_z (i \times k) \\ &\quad + A_y B_x (j \times i) + A_y B_y (j \times j) + A_y B_z (j \times k) \\ &\quad + A_z B_x (k \times i) + A_z B_y (k \times j) + A_z B_z (k \times k) \end{aligned}$$

将[问 2.19]的结果代入上式右边得

$$\begin{aligned} A \times B &= (A_y B_z - A_z B_y) i + (A_z B_x - A_x B_z) j + (A_x B_y - A_y B_x) k \\ &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (2.34)$$

习题 2

2.1 当 $A = 2i - 3j + 4k, B = -i + 2j - 3k$ 时, 求:

(a) $2A + 3B$; (b) $3A - 2B$; (c) $A \cdot B$; (d) $|A|B$; (e) $A^2 + B^2$; (f) $A \times B$;

(g) $(A+B) \cdot (A-B)$; (h) $A \cdot (A \times B)$;

(i) 与 A 和 B 垂直的单位矢量; (j) $(A+B) \times (A-B)$ 。

2.2 对于两个任意的矢量 A, B , 证明下式成立。

(a) $|A+B| \leq |A| + |B|$; (b) $|A-B| \geq |A| - |B|$ 。

2.3 求证 $|A \cdot (B \times C)|$ 与以从一点出发的三个矢量 A, B, C 为三个棱边的平行六面体的体积相等。

2.4 当 $A = A_x i + A_y j + A_z k, B = B_x i + B_y j + B_z k, C = C_x i + C_y j + C_z k$ 时, 求证上题的体积与下面行列式的绝对值相等。

$$\begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$

2.5 求图 2.22 所示桁架杆件的应力, 并画出克雷莫纳应力图。

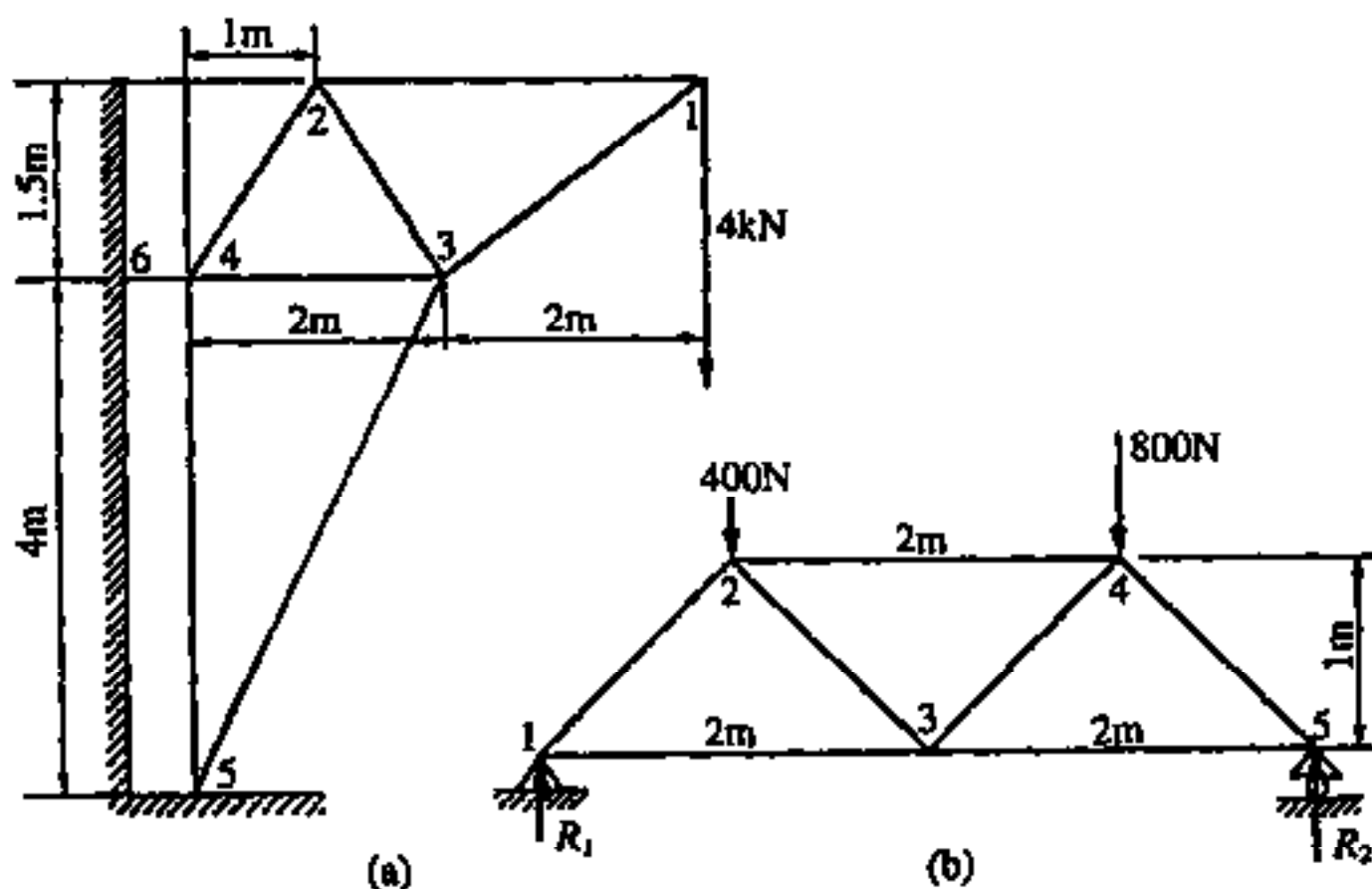


图 2.22

2.6 如图 2.23 所示那样, 设 x, y 平面内的矢量 A 在 x, y 方向的分量为 A_x, A_y , 又设 A 在这个 x, y 平面内共有原点 O 的另一个坐标轴 Ox', Oy' 方向的分量为 $A_{x'}, A_{y'}$ 时, 若

$$\begin{Bmatrix} A_{x'} \\ A_{y'} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{21} & l_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_x \\ A_y \end{Bmatrix}$$

右边第一因子的 $(2, 2)$ 矩阵 $[l_{ij}]$ 的各元素与 $\angle xOx'$ 的大小 θ 可以用怎样的函数关系表示。

2.7 求上题的矩阵 $[l_{ij}]$ 的逆阵, 并验证 $[l_{ij}]$ 是正交矩阵。

2.8 如图 2.24 所示那样, 有共同原点的两个直角坐标系 $O-x, y, z$ 与 $O-x', y', z'$ 。设空间的一个矢量 A 的 x, y, z 的分量为 A_x, A_y, A_z , x', y', z' 的分量为 $A_{x'}, A_{y'}, A_{z'}$ 时, 若写成

$$\begin{Bmatrix} A_{x'} \\ A_{y'} \\ A_{z'} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{Bmatrix}$$

则矩阵的各元素可以用怎样的角的余弦表示? 并求 $[L_{ij}]$ 的逆阵。证明 $[l_{ij}]$ 是正交矩阵。

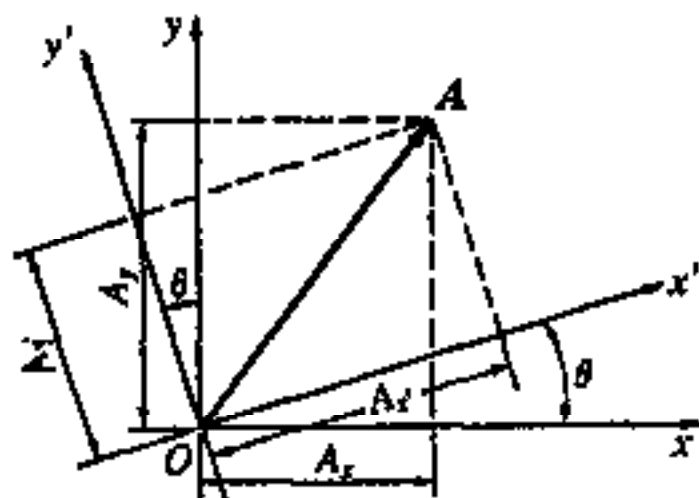


图 2.23

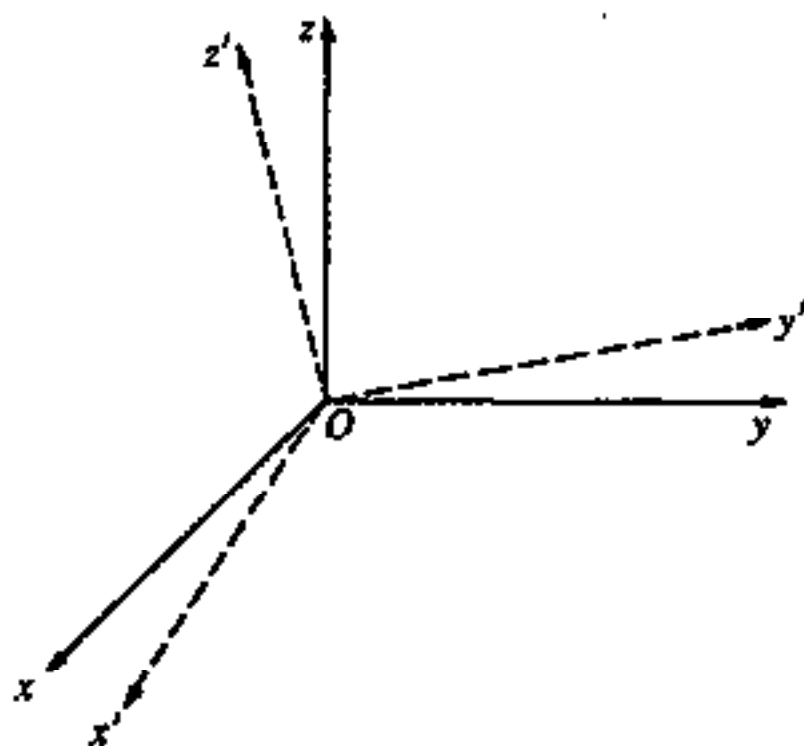


图 2.24

补 遗

2.1 正弦定理

在图 2.25 中, 如设 BD 为 $\triangle ABC$ 的外接圆的直径, $a = \overline{BC}$, $b = \overline{CA}$, $c = \overline{AB}$, 则 $\angle BDC$ 与 $\angle A$ (图 2.25(a)) 或 $180^\circ - \angle A$ (图 2.25(b)) 相等, 又

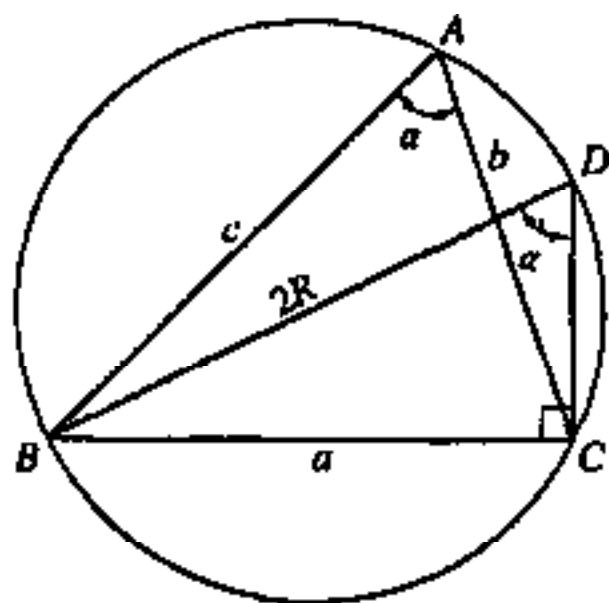
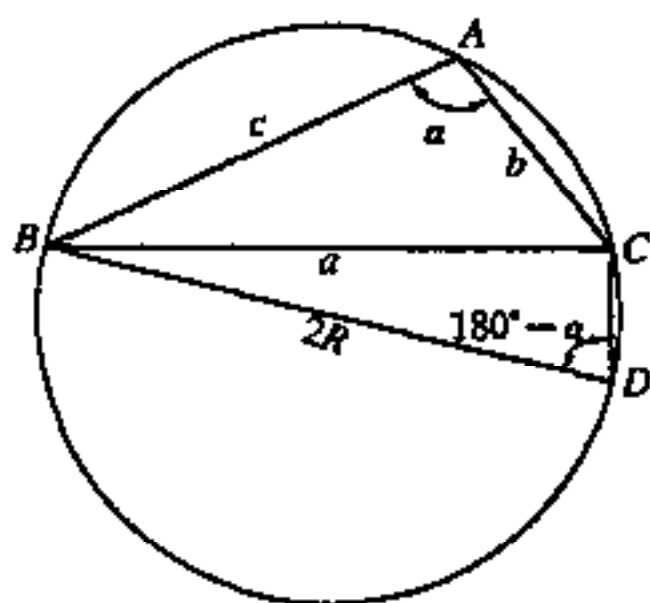
(a) 锐角三角形 ($\alpha < 90^\circ$) 时(b) 钝角三角形 ($\alpha > 90^\circ$) 时

图 2.25 正弦定理

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{BD}} = \sin \angle BDC = \sin \alpha \text{ 或 } \sin(180^\circ - \alpha)$$

$$\therefore \frac{a}{\sin A} = 2R \quad (R = \text{外接圆半径})$$

由上式和另外两个同样的式子, 得:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R \quad (2.35)$$

即三角形的三边与其对角的正弦成比例。这叫正弦定理 (sine rule 或 sine theorem)。

图 2.25 表示 $A \neq 90^\circ$ 的情况, 但即使 $A = 90^\circ$, 式 (2.25) 仍成立。

第3章 张量

3.1 0阶、1阶、2阶张量

0阶张量(tensor of rank zero)就是前面一章叙述过的标量,如温度、质量、功等与坐标系无关的量,即与坐标变换没有关系的量。

1阶张量(tensor of rank one)就是前面一章叙述过的向量,如力,坐标轴方向的分量,对于坐标系 $O-x, y, z$ 及 $O-x', y', z'$ 随着下式变化

$$\begin{Bmatrix} A_{x'} \\ A_{y'} \\ A_{z'} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{Bmatrix} \quad (3.1)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} (A_x, A_y, A_z) &= A \text{ 的 } x, y, z \text{ 的分量} \\ (A_{x'}, A_{y'}, A_{z'}) &= A \text{ 的 } x', y', z' \text{ 分量} \\ l_{11} &= \cos(x'x), l_{12} = \cos(x'y), l_{13} = \cos(x'z) \\ l_{21} &= \cos(y'x), l_{22} = \cos(y'y), l_{23} = \cos(y'z) \\ l_{31} &= \cos(z'x), l_{32} = \cos(z'y), l_{33} = \cos(z'z) \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

另外, $(y'z)$ 表示 y' 轴与 z 轴的夹角。

前面一章对作为两个向量间的积的内积(标量积)和外积(向量积)进行了叙述。这里再定义一个双重积(diadic product)。它的形式如下:

$$\begin{aligned} \mathbf{AB} &= (A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k})(B_x \mathbf{i} + B_y \mathbf{j} + B_z \mathbf{k}) \\ &= A_x B_x \mathbf{ii} + A_x B_y \mathbf{ij} + A_x B_z \mathbf{ik} + A_y B_x \mathbf{ji} + A_y B_y \mathbf{jj} + A_y B_z \mathbf{jk} \\ &\quad + A_z B_x \mathbf{ki} + A_z B_y \mathbf{kj} + A_z B_z \mathbf{kk} \end{aligned} \quad (3.3)$$

式中, \mathbf{ii} 分量, \mathbf{ij} 分量, \dots , \mathbf{kk} 分量由下面的矩阵给出:

$$\begin{bmatrix} A_x B_x & A_x B_y & A_x B_z \\ A_y B_x & A_y B_y & A_y B_z \\ A_z B_x & A_z B_y & A_z B_z \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

对于 $O-x', y', z'$ 坐标系的情况, 与式(3.4)相同, 可以考虑为:

$$\begin{bmatrix} A_{x'}B_{x'} & A_{x'}B_{y'} & A_{x'}B_{z'} \\ A_{y'}B_{x'} & A_{y'}B_{y'} & A_{y'}B_{z'} \\ A_{z'}B_{x'} & A_{z'}B_{y'} & A_{z'}B_{z'} \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

根据式(3.1)可以得式(3.4), 式(3.5)的元素间的关系为

$$\left. \begin{aligned} A_{x'}B_{x'} &= (l_{11}A_x + l_{12}A_y + l_{13}A_z)(l_{11}B_x + l_{12}B_y + l_{13}B_z) \\ &= l_{11}^2 A_x B_x + l_{11}l_{12} A_x B_y + l_{11}l_{13} A_x B_z + l_{12}l_{11} A_y B_x + l_{12}^2 A_y B_y + l_{12}l_{13} A_y B_z \\ &\quad + l_{13}l_{11} A_z B_x + l_{13}l_{12} A_z B_y + l_{13}^2 A_z B_z \\ A_{x'}B_{y'} &= (l_{11}A_x + l_{12}A_y + l_{13}A_z)(l_{21}B_x + l_{22}B_y + l_{23}B_z) \\ &= l_{11}l_{21} A_x B_x + l_{11}l_{22} A_x B_y + l_{11}l_{23} A_x B_z + l_{12}l_{21} A_y B_x + l_{12}l_{22} A_y B_y + l_{12}l_{23} A_y B_z \\ &\quad + l_{13}l_{21} A_z B_x + l_{13}l_{22} A_z B_y + l_{13}l_{23} A_z B_z \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

[问 3.1] 写出式(3.6)作为……省略的余下的 7 个式子。

式(3.4)与式(3.5)的关系可以用下式给出, 请用式(3.6)验证:

$$\begin{bmatrix} A_{x'}B_{x'} & A_{x'}B_{y'} & A_{x'}B_{z'} \\ A_{y'}B_{x'} & A_{y'}B_{y'} & A_{y'}B_{z'} \\ A_{z'}B_{x'} & A_{z'}B_{y'} & A_{z'}B_{z'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x B_x & A_x B_y & A_x B_z \\ A_y B_x & A_y B_y & A_y B_z \\ A_z B_x & A_z B_y & A_z B_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} \\ l_{12} & l_{22} & l_{32} \\ l_{13} & l_{23} & l_{33} \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

[问 3.2] 计算式(3.7)右边的矩阵的积, 用式(3.6)及[问 3.1]的结果验证式(3.7)成立。

式(3.1), 式(3.7)是用 $O-x, y, z$ 坐标系的分量表示的关于 $O-x', y', z'$ 坐标系的分量。反之完全相同, 可以用 $O-x', y', z'$ 坐标系的分量来表示 $O-x, y, z$ 坐标系的分量, 其结果为

$$\begin{Bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} \\ l_{12} & l_{22} & l_{32} \\ l_{13} & l_{23} & l_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{x'} \\ A_{y'} \\ A_{z'} \end{Bmatrix} \quad (3.8)$$

$$\begin{bmatrix} A_x B_x & A_x B_y & A_x B_z \\ A_y B_x & A_y B_y & A_y B_z \\ A_z B_x & A_z B_y & A_z B_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} \\ l_{12} & l_{22} & l_{32} \\ l_{13} & l_{23} & l_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{x'} B_{x'} & A_{x'} B_{y'} & A_{x'} B_{z'} \\ A_{y'} B_{x'} & A_{y'} B_{y'} & A_{y'} B_{z'} \\ A_{z'} B_{x'} & A_{z'} B_{y'} & A_{z'} B_{z'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

根据坐标系决定的 9 个量, 对于坐标系 $O-x, y, z$ 为

$$\begin{bmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

对于 $O-x', y', z'$ 坐标系为

$$\begin{bmatrix} T_{x'x'} & T_{x'y'} & T_{x'z'} \\ T_{y'x'} & T_{y'y'} & T_{y'z'} \\ T_{z'x'} & T_{z'y'} & T_{z'z'} \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

它们相互的关系以与式(3.7), 式(3.9)完全相同的形式

$$\begin{bmatrix} T_{x'x'} & T_{x'y'} & T_{x'z'} \\ T_{y'x'} & T_{y'y'} & T_{y'z'} \\ T_{z'x'} & T_{z'y'} & T_{z'z'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} \\ l_{12} & l_{22} & l_{32} \\ l_{13} & l_{23} & l_{33} \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

或

$$\begin{bmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} \\ l_{12} & l_{22} & l_{32} \\ l_{13} & l_{23} & l_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{x'x'} & T_{x'y'} & T_{x'z'} \\ T_{y'x'} & T_{y'y'} & T_{y'z'} \\ T_{z'x'} & T_{z'y'} & T_{z'z'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

给出时, 这 9 个量的组合称为 2 阶张量(tensor of rank two)或简称为张量(tensor), 其中的一个量称为分量(component)。

张量如

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

那样, 也可以用一个文字 T 表示。

张量的加法、减法、常数倍可以按矩阵的计算方法进行。

张量的矩阵(式(3.14)右边)为对称矩阵时, 这个张量称为对称张量(symmetric tensor); 为反对称矩阵时, 称为反对称张量(skew-symmetric tensor)。像下面那样, 任意的张量可以用对称张量与反对称张量之和表示。

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} T_{xx} & \frac{1}{2}(T_{xy}+T_{yx}) & \frac{1}{2}(T_{xz}+T_{zx}) \\ \frac{1}{2}(T_{yx}+T_{xy}) & T_{yy} & \frac{1}{2}(T_{yz}+T_{zy}) \\ \frac{1}{2}(T_{zx}+T_{xz}) & \frac{1}{2}(T_{zy}+T_{yz}) & T_{zz} \end{bmatrix} \\
 &+ \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}(T_{xy}-T_{yx}) & \frac{1}{2}(T_{xz}-T_{zx}) \\ \frac{1}{2}(T_{yx}-T_{xy}) & 0 & \frac{1}{2}(T_{yz}-T_{zy}) \\ \frac{1}{2}(T_{zx}-T_{xz}) & \frac{1}{2}(T_{zy}-T_{yz}) & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \quad (3.15)$$

3.2 2 阶张量之例(应力张量)

考虑如图 3.1(a)所示受力固体内部的微小正六面体,若将包围这个正六面体的固体对该正六面体的六个表面作用的每单位面积的力(应力)沿 x, y, z 方向分解,则如图(b)所示。

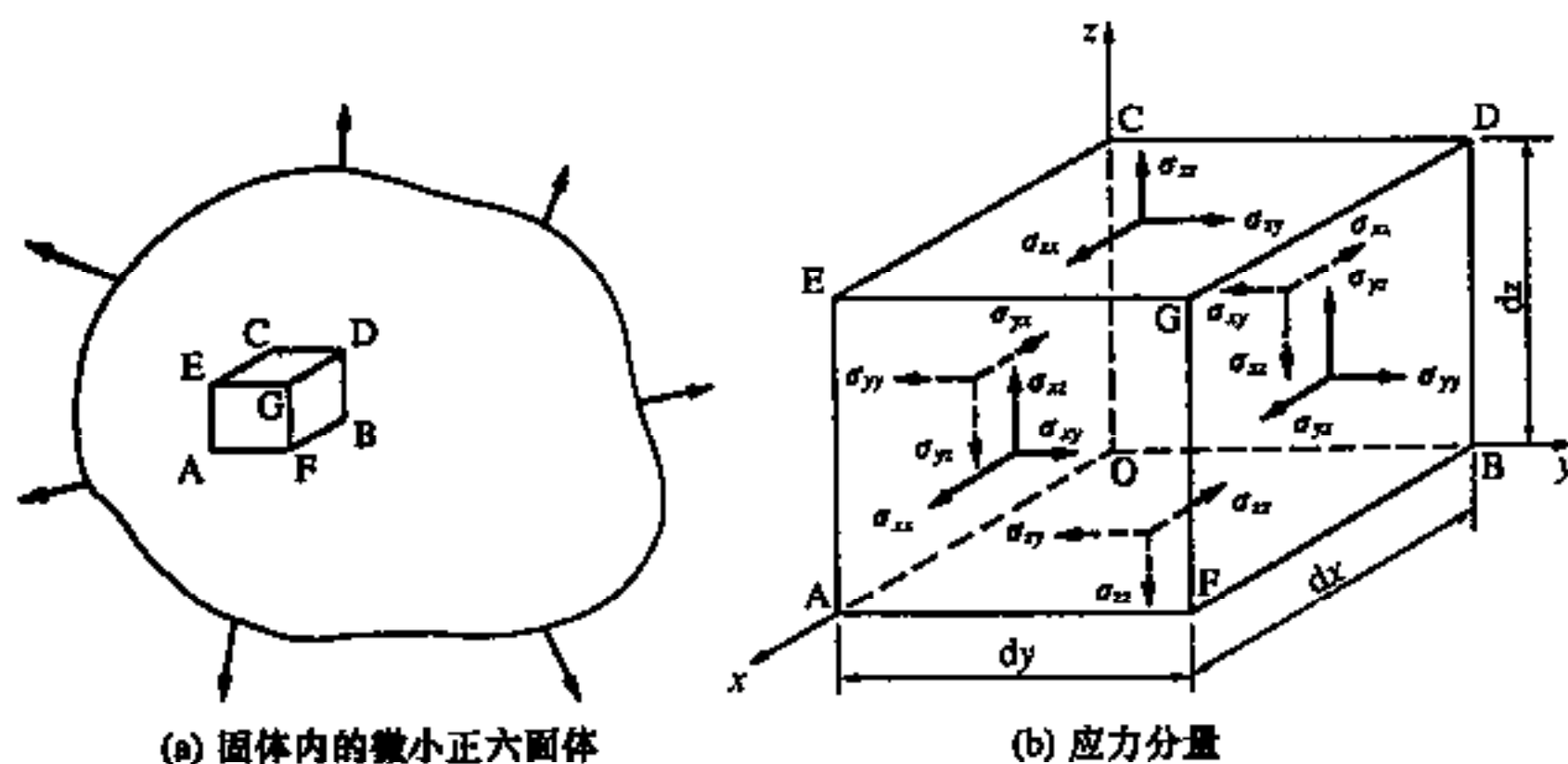


图 3.1 应力张量

在图 3.1 中:

与 x 轴垂直的面上的应力 x, y, z 分量 $= (\sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{xz})$

与 y 轴垂直的面上的应力 x, y, z 分量 $= (\sigma_{yx}, \sigma_{yy}, \sigma_{yz})$

与 z 轴垂直的面上的应力 x, y, z 分量 $= (\sigma_{zx}, \sigma_{zy}, \sigma_{zz})$

将它们全体用矩阵表示,则为

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{--- (作用在与 } x \text{ 轴垂直的面上的应力)} \\ \text{--- (作用在与 } y \text{ 轴垂直的面上的应力)} \\ \text{--- (作用在与 } z \text{ 轴垂直的面上的应力)} \end{matrix}$$

$\begin{matrix} \text{(} x \text{ 方向} \\ \text{的应力)} & \text{(} y \text{ 方向} \\ \text{的应力)} & \text{(} z \text{ 方向} \\ \text{的应力)} \end{matrix}$

(3.16)

σ 称为应力张量(stress tensor)。实际上 σ 是 2 阶张量的情况将在后面说明。 σ 的各分量都具有大小和两种方向。例如, 对第 2 行、第 3 列的元素来说, σ_{yz} 的值是与图 3.1(b) 中的 σ_{yz} 的大小相等的, 如果该值为正, 则方向与图上的方向相同, 如果是负的, 方向就与图上的方向相反。 σ_{yz} 中的第 1 个下标 y 表示 σ_{yz} 作用在与 y 轴垂直的 GFBD、EAOC 面上。 σ_{yz} 中的第 2 个下标 z 表示 σ_{yz} 的向量与 z 轴平行。又在图 3.1(b) 中规定, 若在六面体的各面的外法线方向与坐标轴的正方向一致时, 应力分量的正方向与坐标轴的正方向一致; 在外法线方向与坐标轴的负方向一致的面, 应力分量的正方向与坐标轴的正方向相反, 这两点必须注意。

下面说明应力张量是对称张量的情况。根据图 3.1(b) 的应力分量, 若考虑绕 x 轴转动的力矩的平衡, 因与 x 轴平行的分量不形成绕 x 轴转动的力矩, 所以首先可以考虑将其除外。另外, 应力分量的矢量的延长与 x 轴相交的情况 (OCEA 面的 σ_{yz} , OAFB 面的 σ_{xy}) 可以不考虑。还有 GFBD 面上的 σ_{yy} 与 EAOC 面上的 σ_{yy} , 因大小相等, 方向相反而抵消。对于 CEGD 面上的 σ_{xx} , 与 OAFB 面上的 σ_{xx} 也是一样。因此, 结果可以考虑为

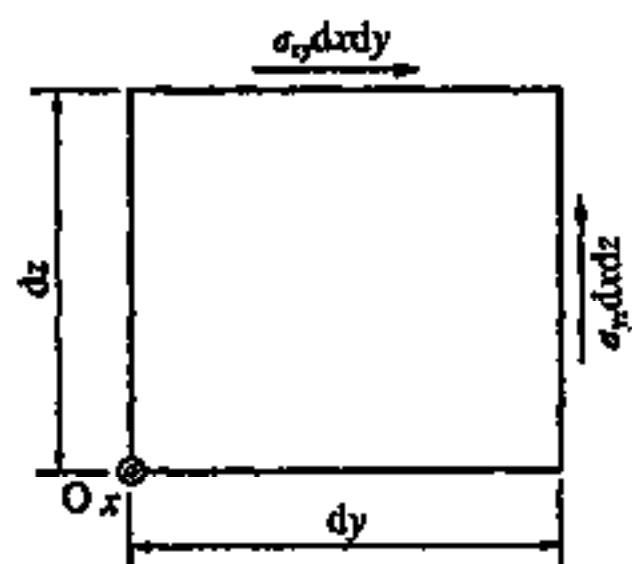


图 3.2 绕 x 轴转动的应力矩的合力

CEGD 面上的 σ_{yz} 与 GFBD 面上的 σ_{yz} 绕 x 轴转动的力矩的平衡。CEGD 面上的 σ_{yz} 的合力由 CEGD 面的每单位面积的力 σ_{yz} 、CEGD 面的面积 $dx dy$ 得到, 为 $\sigma_{yz} dx dy$ 。同样, GFBD 面上的 σ_{yz} 的合力为 $\sigma_{yz} dx dz$ 。这些情况如图 3.2 所示。图 3.2 是将图 3.1(b) 的微小正方体从 x 轴的箭头的前方, 逆向 x 轴方向所见的图。根据在这个图中的绕 Ox 转动的力矩的平衡可以得到关于绕 y 轴、 z 轴转动的完全一样的力矩平衡方程式。

$$(\sigma_{xy} dx dy) dz = (\sigma_{yz} dx dz) dy$$

将上式的两边分别除以微小正方体的体积 $dx dy dz$, 得下式的第 1 式, 对于其他两式也可以用同样的方法得到。

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx}, \quad \sigma_{xz} = \sigma_{zx}, \quad \sigma_{yz} = \sigma_{zy} \quad (3.17)$$

[问 3.3] 推导式(3.17)的第 2、第 3 式。

由上可知, 应力张量 σ 是对称张量。这里的应力 $\sigma_{xy}, \sigma_{yx}, \sigma_{xz}, \sigma_{zx}, \sigma_{yz}, \sigma_{zy}$ 从图 3.1(b) 发现, 全部向量均在六面体的表面, 对六面体的表面起摩擦作用。它们被称为剪应力 (shearing stress)。式(3.17)的关系称为剪应力的共轭 (成对) 性 (conjugateness), σ_{xy} 与 σ_{yx} 、 σ_{xz} 与 σ_{zx} 、 σ_{yz} 与 σ_{zy} 中的一方称为是另一方的共轭剪应力 (conjugate shearing stress)。另外, 在图 3.1(b) 中, $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}$ 垂直作用在微小正方体的表面, 所以称其为正应力 (normal stress 或 direct stress)。

下面从图 3.1(b) 的六面体中切出具有如图 3.3(a) 那样的、与 x, y, z 轴垂直的三个面和一个斜面组成的四面体 OLMN, 将其示于图 3.3(b), (c)。为了容易看出作用在这个四面体表面上的应力, 将作用在与坐标轴垂直的三个面 $\triangle OMN, \triangle ONL, \triangle OLM$ 上的应力示于图(b), 将作用在与坐标轴斜交的面 $\triangle LMN$ 上的应力示于图(c)。图(c)的应力 σ_{nx} 表示具有法线 n 的面 ($\triangle LMN$ 面) 上的应力的 x 向分量, σ_{ny} 就是相同面上的应力的 y 向分量, σ_{nz} 则是 z 向分量。

四面体 OLMN 同时受到图 3.3(b), (c) 的应力作用时保持平衡。这时的平衡条件, 设 $\triangle LMN, \triangle OMN, \triangle ONL, \triangle OLM$ 的面积分别为 $\Delta S, \Delta S_x, \Delta S_y, \Delta S_z$ 时, 对于 x 方向的平衡

$$\sigma_{nx} \Delta S = \sigma_{xx} \Delta S_x + \sigma_{yx} \Delta S_y + \sigma_{zx} \Delta S_z \quad (3.18)$$

而 ΔS_x 在 ΔS 的 yz 面上的投影是

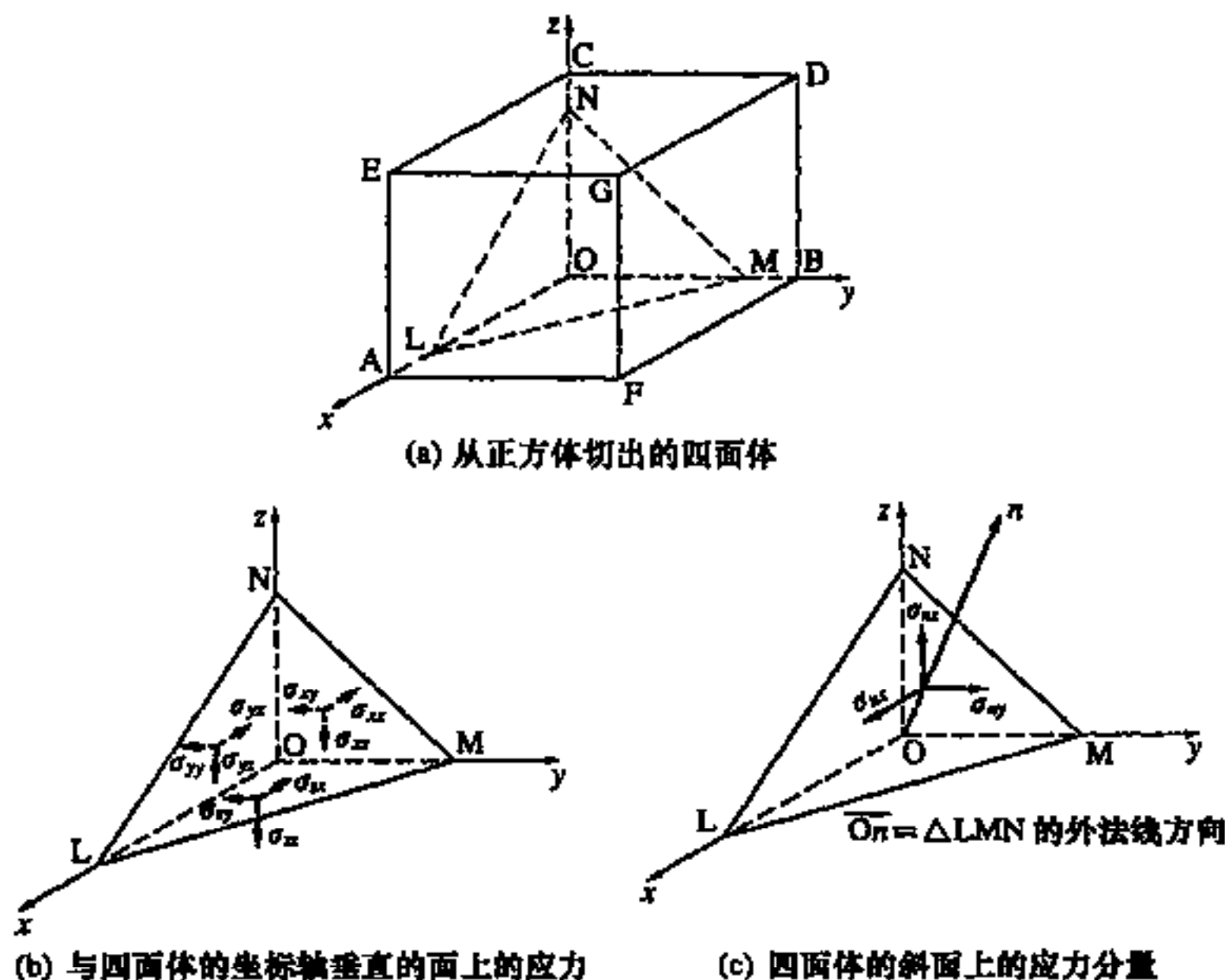
$$\Delta S_x = \Delta S \cos \alpha \quad (3.19)$$

设式中的 α 为 ΔS 与 ΔS_x (即 yz 面) 的夹角。由于两个面的夹角与两个面的垂线 (法线) 的夹角相等, ΔS 的法线是图 3.2(c) 中的 On , ΔS_x 的法线是 Ox (x 轴), 因此

$$\alpha = \angle xOn \quad (3.20)$$

将这个角简记为 (xn) (表示 x 方向和 n 方向的夹角)。对于 $\Delta S_y, \Delta S_z$ 也是一样, 从式(3.19)、式(3.20)得

$$\left. \begin{aligned} \Delta S_x &= \Delta S \cos(xn) \\ \Delta S_y &= \Delta S \cos(yn) \\ \Delta S_z &= \Delta S \cos(zn) \end{aligned} \right\} \quad (3.21)$$

图 3.3 任意面上的应力的 x, y, z 分量

若将式(3.21)代入式(3.18),约去两边的 ΔS ,就得到了 x 方向的力的平衡方程式。关于 y 方向、 z 方向的平衡方程式也可以用同样的方法得到。由此,三个方向的平衡方程式为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{nx} &= \sigma_{xx} \cos(xn) + \sigma_{yx} \cos(yn) + \sigma_{zx} \cos(zn) \\ \sigma_{ny} &= \sigma_{xy} \cos(xn) + \sigma_{yy} \cos(yn) + \sigma_{zy} \cos(zn) \\ \sigma_{nz} &= \sigma_{xz} \cos(xn) + \sigma_{yz} \cos(yn) + \sigma_{zz} \cos(zn) \end{aligned} \right\} \quad (3.22)$$

[问 3.4] 推导式(3.22)的第 2、第 3 式。

若用矩阵形式写出式(3.22),则为

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{nx} \\ \sigma_{ny} \\ \sigma_{nz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{yx} & \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{zy} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos(xn) \\ \cos(yn) \\ \cos(zn) \end{Bmatrix} \quad (3.23)$$

式中,左边的矢量表示具有法线 \overline{On} 的面上的应力向量 σ_n ,右边的第一因子表示应力张量 σ ,第二因子表示 \overline{On} 方向的单位向量 n 。因此,式(3.23)可以简写为

$$\sigma_n = \sigma \cdot n \quad (3.24)$$

这个式子的右边可以称为张量 σ 与矢量的内积。

下面分析 $O-xyz$ 坐标系与 $O-x'y'z'$ 坐标系。

在图 3.3(c) 及式(3.22), 式(3.23)中若考虑取 \overline{On} 为 $\overline{Ox'}$ 时, 当式(3.22)使用式(3.2)的形式时, 得

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{x'x} &= \sigma_{xx}l_{11} + \sigma_{yx}l_{12} + \sigma_{zx}l_{13} \\ \sigma_{y'x} &= \sigma_{xy}l_{11} + \sigma_{yy}l_{12} + \sigma_{zy}l_{13} \\ \sigma_{z'x} &= \sigma_{xz}l_{11} + \sigma_{yz}l_{12} + \sigma_{zz}l_{13} \end{aligned} \right\} \quad (3.25)$$

或者, 使用矩阵形式时则得:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{x'x} \\ \sigma_{y'x} \\ \sigma_{z'x} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{yx} & \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{zy} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} l_{11} \\ l_{12} \\ l_{13} \end{Bmatrix} \quad (3.26)$$

上式左边的 $\sigma_{x'x}, \sigma_{y'x}, \sigma_{z'x}$ 是与 x' 轴垂直的面(在图 3.3(c)中 n 方向取为 x' 方向时的 ΔLMN)上的应力矢量 σ_x , 在沿 x, y, z 三个方向分解的分量。如果将 σ_x 沿 x', y', z' 三个方向分解的分量写成 $\sigma_{x'x'}, \sigma_{y'x'}, \sigma_{z'x'}$, 则在 $(\sigma_{x'x}, \sigma_{y'x}, \sigma_{z'x})$ 与 $(\sigma_{x'x'}, \sigma_{y'x'}, \sigma_{z'x'})$ 之间, 根据式(3.1), 式(3.27)成立(仅仅是考虑用 x' 面上的应力矢量 σ_x 代替式(3.1)的矢量 A , 也仅仅是用 σ_x 组成的文字置换式(3.1)中 A 组成的文字)。

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{x'x'} \\ \sigma_{y'x'} \\ \sigma_{z'x'} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{x'x} \\ \sigma_{x'y} \\ \sigma_{x'z} \end{Bmatrix} \quad (3.27)$$

将式(3.26)代入式(3.27)得

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{x'x'} \\ \sigma_{y'x'} \\ \sigma_{z'x'} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{yx} & \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{zy} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} l_{11} \\ l_{12} \\ l_{13} \end{Bmatrix} \quad (3.28)$$

与上面完全相同, 在图 3.3 及式(3.22), 式(3.23)中若取 \overline{On} 为 $\overline{Oy'}$, 则

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{y'y'} \\ \sigma_{x'y'} \\ \sigma_{z'y'} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{yx} & \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{zy} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} l_{21} \\ l_{22} \\ l_{23} \end{Bmatrix} \quad (3.29)$$

同样, 若取 \overline{On} 为 $\overline{Ox'}$, 则

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{x'x'} \\ \sigma_{y'y'} \\ \sigma_{z'x'} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{yx} & \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{zy} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} l_{31} \\ l_{32} \\ l_{33} \end{Bmatrix} \quad (3.30)$$

[问 3.5] 对式(3.28), 式(3.29), 式(3.30)进行验证, 并给出与式(3.6)、[问 3.1]同样形式的变换法则。

式(3.28), 式(3.29), 式(3.30)可以归纳为:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{x'x'} & \sigma_{y'x'} & \sigma_{z'x'} \\ \sigma_{x'y'} & \sigma_{y'y'} & \sigma_{z'y'} \\ \sigma_{x'z'} & \sigma_{y'z'} & \sigma_{z'z'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{yx} & \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{zy} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} \\ l_{12} & l_{22} & l_{32} \\ l_{13} & l_{23} & l_{33} \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

如果取两边的转置矩阵

$$\begin{bmatrix} \sigma_{x'x'} & \sigma_{x'y'} & \sigma_{x'z'} \\ \sigma_{y'x'} & \sigma_{y'y'} & \sigma_{y'z'} \\ \sigma_{z'x'} & \sigma_{z'y'} & \sigma_{z'z'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} \\ l_{12} & l_{22} & l_{32} \\ l_{13} & l_{23} & l_{33} \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

这个式子不外乎为 2 阶张量的坐标变换式(3.12)。将该式左、右两边分别乘以

$$\begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} \\ l_{12} & l_{22} & l_{32} \\ l_{13} & l_{23} & l_{33} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix}$$

若采用正交矩阵的情况, 可以得到与式(3.13)同样形式的关系:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} \\ l_{12} & l_{22} & l_{32} \\ l_{13} & l_{23} & l_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{x'x'} & \sigma_{x'y'} & \sigma_{x'z'} \\ \sigma_{y'x'} & \sigma_{y'y'} & \sigma_{y'z'} \\ \sigma_{z'x'} & \sigma_{z'y'} & \sigma_{z'z'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

因此, 式(3.16)的 σ 是二阶张量, 也可称为应力张量。

[问 3.6] 验证式(3.28), 式(3.29), 式(3.30)与式(3.31)是同等的。

[问 3.7] 求图 3.3 的 $\triangle LMN$ 上的应力矢量 σ_n 的与 $\triangle LMN$ 垂直的分量 σ_{nn} (具有以 \overline{On} 为法线的面上的 \overline{On} 方向的分量即正应力)。

[提示] 可将式(3.28), 式(3.31), 式(3.32)的 x' 考虑为 \overline{On} 方向。当 $\triangle LMN$ 上的应力 σ_n 的方向与 $\triangle LMN$ 的法线方向一致时, 可以作为特殊情况考虑, 这时, 为了简单起见, 可以设

$$\sigma \equiv |\sigma_n|, \quad l \equiv \cos(xn), \quad m \equiv \cos(yn), \quad n \equiv \cos(zn) \quad (3.34)$$

因为 σ_n 与 \overline{On} 同方向, 所以

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{nx} &= \sigma \cos(xn) = \sigma l \\ \sigma_{ny} &= \sigma \cos(yn) = \sigma m \\ \sigma_{nz} &= \sigma \cos(zn) = \sigma n \end{aligned} \right\} \quad (3.35)$$

将式(3.34),式(3.35)代入式(3.22)并移项后得

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_{xx} - \sigma)l + \sigma_{yx}m + \sigma_{zx}n &= 0 \\ \sigma_{xy}l + (\sigma_{yy} - \sigma)m + \sigma_{zy}n &= 0 \\ \sigma_{xz}l + \sigma_{yz}m + (\sigma_{zz} - \sigma)n &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.36)$$

式(3.36)是关于未知数 l, m, n 的联立三元一次齐次方程式^①,它具有 $l=m=n=0$ 以外解的条件是未知数的系数行列式为零,即

$$\begin{vmatrix} \sigma_{xx} - \sigma & \sigma_{yx} & \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} - \sigma & \sigma_{zy} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} - \sigma \end{vmatrix} = 0 \quad (3.37)$$

式(3.37)是关于 σ 的三次方程式,对称性成立,由于应力分量 $\sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \dots, \sigma_{zz}$ 是实数,所以式(3.37)作为 σ 的三次方程式解得的三个解 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 全部是实数。分别产生这三个解的 LMN 面的方位,对于 $\sigma_i (i=1, 2, 3)$ 可取 $\triangle LMN$ 法线的方向余弦 $l_i, m_i, n_i (i=1, 2, 3)$,代入式(3.36)由

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_{xx} - \sigma_i)l_i + \sigma_{yx}m_i + \sigma_{zx}n_i &= 0 \\ \sigma_{xy}l_i + (\sigma_{yy} - \sigma_i)m_i + \sigma_{zy}n_i &= 0 \\ \sigma_{xz}l_i + \sigma_{yz}m_i + (\sigma_{zz} - \sigma_i)n_i &= 0 \\ l_i^2 + m_i^2 + n_i^2 &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (3.38)$$

可以求得与 $\triangle LMN$ 面垂直方向上应力 $\sigma_n (|\sigma_n| = \sigma_i)$ 产生的方向 l_i, m_i, n_i 。因为式(3.38)的第1,第2,第3式不是独立的,所以追加了第4式。 $\sigma_i (i=1, 2, 3)$ 中的两个,例如, σ_1 与 σ_2 不相等时,产生这些应力的面 LMN 的方位互相正交。这种情况可理解为:对于 σ_1 ,根据式(3.38)最初的三个式子,有

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 l_1 &= \sigma_{xx}l_1 + \sigma_{yx}m_1 + \sigma_{zx}n_1 \\ \sigma_1 m_1 &= \sigma_{xy}l_1 + \sigma_{yy}m_1 + \sigma_{zy}n_1 \\ \sigma_1 n_1 &= \sigma_{xz}l_1 + \sigma_{yz}m_1 + \sigma_{zz}n_1 \end{aligned} \right\} \quad (3.39)$$

对于 σ_2 也同样有

① 如将式(3.36)的第一式改变为

$$(\sigma_{xx} - \sigma)l + \sigma_{yx}m = -\sigma_{zx}n$$

则此式两边任何一项也是关于 l, m, n 的同次数(1次),因而是齐次方程式。对于第二、第三式也是如此。一般地,在联立一次方程式(1.7),(1.13),(1.14)中,右端的常数项均为零时,是联立一次齐次方程式。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_2 l_2 &= \sigma_{xx} l_2 + \sigma_{yx} m_2 + \sigma_{zx} n_2 \\ \sigma_2 m_2 &= \sigma_{xy} l_2 + \sigma_{yy} m_2 + \sigma_{zy} n_2 \\ \sigma_2 n_2 &= \sigma_{xz} l_2 + \sigma_{yz} m_2 + \sigma_{zz} n_2 \end{aligned} \right\} \quad (3.40)$$

若将式(3.39)的第1式乘以 l_2 , 第2式乘以 m_2 , 第3式乘以 n_2 后相加得

$$\begin{aligned} \sigma_1 (l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2) &= (\sigma_{xx} l_1 + \sigma_{yx} m_1 + \sigma_{zx} n_1) l_2 + (\sigma_{xy} l_1 + \sigma_{yy} m_1 + \sigma_{zy} n_1) m_2 \\ &\quad + (\sigma_{xz} l_1 + \sigma_{yz} m_1 + \sigma_{zz} n_1) n_2 \\ &= l_1 (\sigma_{xx} l_2 + \sigma_{xy} m_2 + \sigma_{xz} n_2) + m_1 (\sigma_{yx} l_2 + \sigma_{yy} m_2 + \sigma_{yz} n_2) \\ &\quad + n_1 (\sigma_{zx} l_2 + \sigma_{zy} m_2 + \sigma_{zz} n_2) \end{aligned}$$

上式右边各()内, 根据式(3.17), 式(3.40)分别与 $\sigma_2 l_2, \sigma_2 m_2, \sigma_2 n_2$ 相等。因此上式成为

$$(\sigma_1 - \sigma_2)(l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2) = 0 \quad (3.41)$$

可是由于最初假定 $\sigma_1 \neq \sigma_2$, 所以

$$l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0 \quad (3.42)$$

故 σ_1 与 σ_2 不相等时, 它们的应力方向(或产生应力的面的方向)互相正交。对于 $\sigma_1 \neq \sigma_3$ 时的 σ_1 与 σ_3 , $\sigma_2 \neq \sigma_3$ 时的 σ_2 与 σ_3 也同样如此。若 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 都互相不等时, 则 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 的方向, 或者其作用面的方向互相正交。

如果 $\sigma_1 = \sigma_2$, 即根据式(3.41) $l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2$ 也可以不为零, 要是 $\sigma_1 = \sigma_2 \neq \sigma_3$ 时, 与 σ_3 垂直的方向可以考虑为 $\sigma_1 (= \sigma_2)$ 方向, 而当 $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ 时, $\sigma_1 (= \sigma_2 = \sigma_3)$ 的方向为怎样的方向都可以。

以上的 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 称为主应力(principal stress), 产生主应力的面 LMN 的三个方位(面 LMN 的法线方向)称为主方向(principal direction)。

[问 3.8] 当 x, y, z 的方向与主方向一致时, 求图 3.3 的斜面 LMN 上的应力向量的大小 $p = |\sigma_n|$ 。

[提示] 在式(3.22)给出的 $\sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}$ 是 σ_n 的 x, y, z 分量时, 本问题可以采用

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

[问 3.9] 当 x, y, z 方向与主方向一致时, 求图 3.3 的斜面 LMN 上的应力矢量 σ_n 在斜面 LMN 内的分量 τ (剪应力)。

[提示] 用[问 3.7]、[问 3.8]的结果和三平方定理 $p^2 = \sigma_{nn}^2 + \tau^2$ 。

因为式(3.37)具有 σ 的三个解 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, 所以可以对左边进行如下的因式分解

$$\begin{vmatrix} \sigma_{xx} - \sigma & \sigma_{yx} & \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} - \sigma & \sigma_{zy} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} - \sigma \end{vmatrix} = (\sigma_1 - \sigma)(\sigma_2 - \sigma)(\sigma_3 - \sigma) \quad (3.43)$$

展开左边的行列式, 取下右边的括弧, 等置两边的 σ 的对应次数的系数, 可得

$$\left. \begin{aligned} I_1 &\equiv \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \\ I_2 &\equiv - \left\{ \begin{vmatrix} \sigma_{yy} & \sigma_{yx} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{xx} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \sigma_{zz} & \sigma_{zx} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{zz} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{vmatrix} \right\} \\ &= -(\sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1 + \sigma_1\sigma_2) \\ I_3 &\equiv \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{vmatrix} = \sigma_1\sigma_2\sigma_3 \end{aligned} \right\} \quad (3.44)$$

因为式右边仅仅取决于主应力, 而与坐标系无关, 所以左边的量也与坐标变换无关。即在式(3.44)中, 即使将直角坐标 x, y, z 变成其他直角坐标 x', y', z' , 同样的形式仍然成立。例如, 对 I_1 而言, 有

$$I_1 = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} = \sigma_{x'x'} + \sigma_{y'y'} + \sigma_{z'z'} = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \quad (3.45)$$

对 I_2, I_3 也是一样。

上面所述的 I_1, I_2, I_3 不管变成怎样的直角坐标系, 都可以用同样形式给出, 它们是与坐标变换无关的量(标量)。 I_1, I_2, I_3 称为应力张量的第 1, 第 2, 第 3 不变量 (first, second and third invariants)。

以上所述的应力张量, 也适用于一般对称张量, 对于主应力、主方向, 即使一般对称张量, 也可以用与主值 T_1, T_2, T_3 , 主方向完全相同的方法计算。对于不变量 I_1, I_2, I_3 也是一样。

[问 3.10] 推导式(3.44)的 I_1, I_2, I_3 。

3.3 下标记号

直到目前为止, 都是用下标 x, y, z 将矢量 A 的 x, y, z 分量表示为 A_x, A_y, A_z , 张量 T 或 σ 的 x, y, z 分量表示为

$$\begin{bmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

在本节用 1, 2, 3 代替下标 x, y, z 。这时, 如式(3.1)则为

$$\left. \begin{aligned} A_{1'} &= l_{11}A_1 + l_{12}A_2 + l_{13}A_3 \\ A_{2'} &= l_{21}A_1 + l_{22}A_2 + l_{23}A_3 \\ A_{3'} &= l_{31}A_1 + l_{32}A_2 + l_{33}A_3 \end{aligned} \right\} \quad (3.46)$$

在这里, 若将左边的 $A_{1'}, A_{2'}, A_{3'}$ 改写为 A'_1, A'_2, A'_3 , 则式(3.46)可以改写为:

$$\left. \begin{aligned} A'_1 &= \sum_{j=1}^3 l_{1j}A_j \\ A'_2 &= \sum_{j=1}^3 l_{2j}A_j \\ A'_3 &= \sum_{j=1}^3 l_{3j}A_j \end{aligned} \right\} \quad (3.47)$$

且式(3.47)可以写成下面的一个统式:

$$A'_i = \sum_{j=1}^3 l_{ij}A_j \quad (i=1, 2, 3) \quad (3.48)$$

为了书写简单, 在一项中当同一个下标反复出现 2 次时, 可不写出一个个总和记号。这样的约束称为总和归约(summation convention), 若采用总和归约, 对于式(3.48)的 $l_{ij}A_j$ 项, 作为 l_{ij} 的第 2 个下标 j 和 A_j 的下标 j , 因为同一个下标反复出现在一个项 l_{ij} 和 A_j 中, 所以可以将总和记号 $\sum_{j=1}^3$ 省略, 而将式(3.48)改写为

$$A'_i = l_{ij}A_j \quad (3.49)$$

式中, 关于 i 因从 1 增加到 3, 所以

$$l_{ij}A_j = \sum_{j=1}^3 l_{ij}A_j = l_{i1}A_1 + l_{i2}A_2 + l_{i3}A_3 = \sum_{k=1}^3 l_{ik}A_k = l_{ik}A_k \quad (3.50)$$

即对于总和归约, 反复出现的下标可以变更为其他文字。因此, 式(3.49)也可以写为

$$A'_i = l_{ik}A_k \quad (3.51)$$

对于矢量 B 同样也可以写为

$$B'_l = l_{lk}B_k \quad (3.52)$$

式中, $A_k (k=1, 2, 3)$, $B_l (l=1, 2, 3)$ 可以理解为 A, B 的 x, y, z 分量, $A'_i (i=1, 2,$

3), $B'_j = (j=1, 2, 3)$ 可以理解为 A, B 的 x', y', z' 分量。从式(3.51)、式(3.52)得

$$A'_i B'_j = l_{ik} l_{jl} A_k B_l \quad (3.53)$$

因为上式右边的下标 k 与 l 可以反复出现, 所以省略了 $\sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3$ 。由式(3.53)我们发现, 对于式(3.6)如果用下标记号书写的话, 就变得非常简单了。

【问 3.11】在式(3.53)中, 考虑 $i=1, 2, 3, j=1, 2, 3$ 组合的 $(i=1, j=1), (i=2, j=2), \dots, (i=3, j=3)$ 的各种情况, 写下总和 $\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3$, 并验证式(3.53)表示了式(3.6)的最初的 2 个式子和【问 3.1】的 7 个式子, 即合计共 9 个式子。

与式(3.53)相同, 即使对于张量 T , 也可以将式(3.12)写成如下形式:

$$T'_{ij} = l_{ik} l_{jl} T_{kl} \quad (3.54)$$

【问 3.12】验证式(3.54)与式(3.12)是表示同样情况的式子。

关于张量 T , 可以考虑下面三种不变量:

$$\left. \begin{aligned} H_1 &= T_{ii} = T'_{ii} \\ H_2 &= T_{ij} T_{ji} = T'_{ij} T'_{ji} \\ H_3 &= T_{ij} T_{jk} T_{ki} = T'_{ij} T'_{jk} T'_{ki} \end{aligned} \right\} \quad (3.55)$$

由于 H_1 与前述式(3.44)的 I_1 相同, 因此, H_2, H_3 也可以是用 I_1, I_2, I_3 表示的量, 其表达式如下:

$$\left. \begin{aligned} H_2 &= I_1^2 - 2I_2 \\ H_3 &= I_1^3 - 3I_1 I_2 + 3I_3 \end{aligned} \right\} \quad (3.56)$$

习题 3

3.1 由 x, y, z 的函数 $u=u(x, y, z), v=v(x, y, z), w=w(x, y, z)$ 可以作出雅可比矩阵(Jacobian matrix)

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (3.57)$$

写出它的二阶张量表示式。

3.2 设上题中 u, v, w 为固体内的点 (x, y, z) 的微小变位的 x, y, z 的分量时, 上题的变形张量(deformation tensor)。这个变形张量可以分解为对称张量和不对称张量。这时可以得到的对称张

量称为应变张量(strain tensor), 不对称张量称为转动张量(rotation tensor)。

3.3(a) 写出关于式(3.14)的张量 T 的第1, 第2, 第3不变量 I_1, I_2, I_3 的式子。

(b) I_1 是沿 T 的矩阵的主对角线的多元素之和, 称为张量的迹(trace)。 $I_1/3$ 是沿张量主对角线的元素的平均值, 若将其设为 M 时, 求用

$$S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} M & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & M \end{bmatrix}$$

或 $S_{ij} = T_{ij} - M\delta_{ij} \quad (\delta_{ij} = \text{克罗内克 } \delta) \quad (3.58)$

给出的张量 S (称为偏差张量(deviation tensor)) 的第1, 第2, 第3不变量 J_1, J_2, J_3 (对偏差张量的情况, 将 I_1, I_2, I_3 写为 J_1, J_2, J_3)。

(c) 设上一问题的偏差张量的主值为 S_1, S_2, S_3 时, 求证

$$\left. \begin{aligned} J_2 &= \frac{1}{2}(S_1^2 + S_2^2 + S_3^2) \\ J_3 &= \frac{1}{3}(S_1^3 + S_2^3 + S_3^3) \end{aligned} \right\} \quad (3.59)$$

(d) 用 J_2 表示关于张量 T_{ij} 的式子

$$(T_{22} - T_{33})^2 + (T_{33} - T_{11})^2 + (T_{11} - T_{22})^2 + 6(T_{23}^2 + T_{31}^2 + T_{12}^2)$$

(e) 当张量 $T = [T_{ij}]$ 为应力张量 $\sigma = [\sigma_{ij}]$ 时, 用主应力 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 表示在图 3.3(c) 中 \overline{On} 的方向余弦 $\cos(x\hat{n}) = \cos(y\hat{n}) = \cos(z\hat{n}) = 1/\sqrt{3}$ 组成的面 LMN 上的剪应力 τ_{oct} , 并用不变量 J_2 表示。这个 τ_{oct} 称为八面体剪应力(octahedral shearing stress)。

[提示] 将题意中方向余弦的值代入[问 3.9]的答式中。

(f) 用 J_2 表示偏差张量的主值 S_1, S_2, S_3 平方的平均值的平方根, 或 rms 值(root-mean-square value)

$$\sqrt{\frac{1}{3}(S_1^2 + S_2^2 + S_3^2)}$$

并与上题的结果进行比较。

3.4 二维张量在式(3.14)中是 $T_{yz} = T_{zy} = T_{zx} = T_{xz} = T_{xy} = T_{yx} = 0$ 的情况。这种情况设 x', y' 方向在 x, y 面内, 且 z' 轴方向与 z 轴方向一致。这时若设 $\angle xOx' = \theta$, 验证式(3.12)可以被简化为

$$\begin{bmatrix} T_{x'x'} & T_{x'y'} \\ T_{y'x'} & T_{y'y'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{xx} & T_{xy} \\ T_{yx} & T_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad (3.60)$$

3.5 当上题的张量为对称张量($T_{yz} = T_{zy}$ 时)

(a) 请对下式进行推导

$$\left. \begin{aligned} T_{x'x'} &= \frac{T_{xx} + T_{yy}}{2} + \frac{T_{xx} - T_{yy}}{2} \cos 2\theta + T_{xy} \sin 2\theta \\ T_{x'y'} &= \frac{T_{yy} - T_{xx}}{2} \sin 2\theta + T_{xy} \cos 2\theta \end{aligned} \right\} \quad (3.61)$$

(b) 求 $T_{x'y'}$ 为零时的 $\angle xOx'$ 即 θ , 并求这时的 $T_{x'x'}$ 值。这时二维张量的主值是 T_1, T_2 。

(c) 推导从问(a)的两个式子中消去 θ 而得的下式:

$$\left(T_{x'x'} - \frac{T_{xx} + T_{yy}}{2} \right)^2 + T_{x'y'}^2 = \left(\frac{T_{xx} - T_{yy}}{2} \right)^2 + T_{xy}^2 \quad (3.62)$$

在这个式子中, 若把 $T_{x'x'}, T_{x'y'}$ 考虑为变数; 把 T_{xx}, T_{xy}, T_{yy} 考虑为常数。取 $T_{x'x'}$ 为横坐标, $T_{x'y'}$ 为纵坐标, 画出式(3.62)的图形。

[提示] 这个图形为圆, 称为对应于二维张量的莫尔圆(Mohr's circle)。

(d) 验证在上题的莫尔圆中, $T_{x'x'}$ 的最大值与最小值与本题(b)的主值 T_1, T_2 一致。

(e) 根据莫尔圆求 $|T_{x'y'}|$ 的最大值和最大值的方向。

(f) 对于二维张量, 证明

$$T_{x'x'} + T_{y'y'} = T_{xx} + T_{yy}$$

$$\begin{vmatrix} T_{x'x'} & T_{x'y'} \\ T_{y'x'} & T_{y'y'} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} T_{xx} & T_{xy} \\ T_{yx} & T_{yy} \end{vmatrix}$$

成立。这两个式子分别是二维张量的第1, 第2不变量。

3.6 验证式(3.56)。

第4章 偏导数

4.1 多元函数

已知汽缸内气体的压力 p , 比体积(每单位质量的体积) v , 绝对温度 T 之间的状态方程式

$$pv = RT \quad (4.1)$$

成立。式中, R 是根据气体的种类决定的常数。对式(4.1)的 v 求解得:

$$v = R \frac{T}{p} \quad (4.2)$$

若在某个范围(定义域)内任意选择了 p 和 T , 就可以确定 v 。这时 v 称为是两变量 p, T 的函数。 p 和 T 称为自变量(independent variable), v 称为因变量(dependent variable)。

通常, 若在某个定义域内任意选择 n 个变量 x_1, x_2, \dots, x_n , 则根据这些变量决定另一个变量 y 值时, y 称为是 x_1, x_2, \dots, x_n 的函数, 可写为:

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (4.3)$$

上述情况, x_1, x_2, \dots, x_n 称为自变量, y 称为因变量。

4.2 偏微分法

为了简单起见, 只叙述式(4.3)中 $n=2$ 的情况。对于 $n=3$ 以上的情况也是一样的。取 x, y 为自变量, z 为因变量, 考虑两变量 x, y 的函数

$$z = f(x, y) \quad (4.4)$$

现在, 让 y 不变化(即把 y 作为常数), 只让 x 变化时, $f(x, y)$ 在点 (x, y) 处对 x 的导数

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \quad (4.5)$$

称为函数 $f(x, y)$ 在点 (x, y) 处的 x 的偏导数(partial differential coefficient), 用 $f_1(x, y), \partial f(x, y)/\partial x, f_x, \partial f/\partial x, z_x, \partial z/\partial x$ 等表示。同样, $f(x, y)$ 在点 (x, y) 处对 y 的偏导数 $f_y(x, y), \partial f(x, y)/\partial y, \dots$, 可以用

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} \quad (4.6)$$

给出。当给出函数 $f(x, y)$ 时, 求 x 的偏导数 $f_x(x, y)$, 称为函数 $f(x, y)$ 对 x 偏导数。为了求函数 $f(x, y)$ 对 x 偏导数, 可以把 y 看作常数而对 x 求导。 $f(x, y)$ 对 y 求偏导数时也一样, 可以把 x 看作常数而对 y 求导。

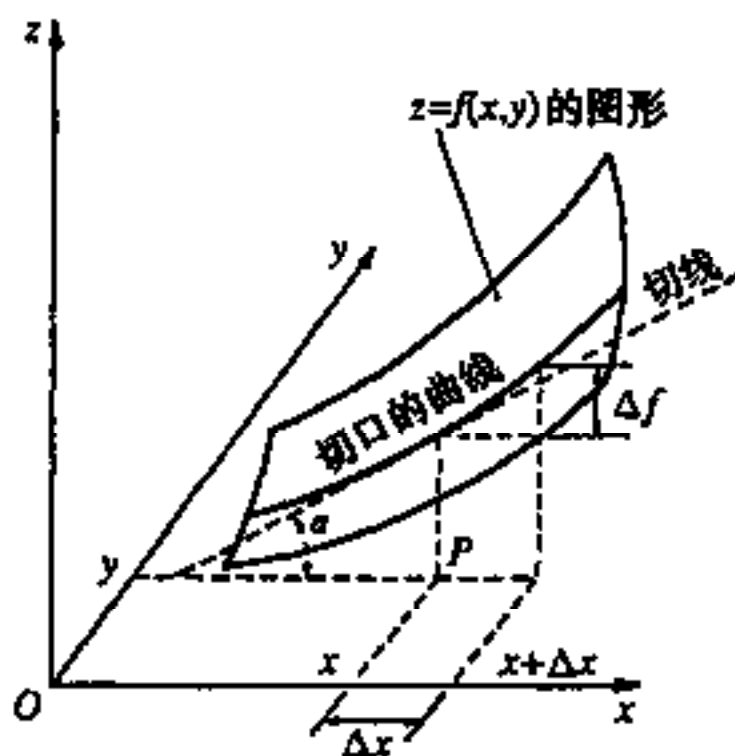


图 4.1 偏导数

下面讨论偏导数的几何学意义。对于 $f_x(x, y)$ 的情况, 因为把 y 看作为常数对 x 微分, 所以可以用通过点 $P(x, y)$ 的、与 xz 面 (x 轴和 z 轴所确定的平面) 平行的平面与曲面 $z = f(x, y)$ 相交的曲线来考虑。这时, 在该曲线所作的切线上的函数 f 的增加方向与 x 的正方向形成的夹角 α 的正切, 即 $\tan \alpha$ 就表示 $f_x(x, y)$ 。这种情况如图 4.1 所示。对于 $f_y(x, y)$ 的情况也是一样的。

$f(x, y)$ 对 x 二次偏微分之后得到的偏导数可用 $f_{xx}, \partial^2 f / \partial x^2$ 等表示, 而将这个偏导数对 y 一次偏微分后得到的偏导数 $(\partial / \partial y)(\partial^2 f / \partial x^2)$ 则可以用 $f_{yxx}, \partial^3 f / \partial y \partial x^2$ 等表示。对于其他的情况也是一样的。这些都称为高阶偏导数 (partial derivative of higher order)。这里省略了有关的证明以及详细的说明^①, 仅对于偏微分时的顺序交换的定理作如下说明。

定理 在 x, y 的某个区域内如果 f_{xy}, f_{yx} 连续, 则在该区域内 $f_{xy} = f_{yx}$ (许瓦兹 (Shwarz) 定理)

[例 4.1] 将下面的函数分别对 x, y 偏导数

(a) $f(x, y) = \log(x^2 + y^2)$

(b) $f(x, y) = A \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}$ (A, a, b 是常数)

[解] (a) $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y}{x^2 + y^2}$

(b) $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\pi A}{a} \cos \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\pi A}{b} \sin \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b}$

[问 4.1] 对于上例中的对数函数 $f(x, y) = \log(x^2 + y^2)$, 求 $f_{xx}, f_{xy}, f_{yx}, f_{yy}$, 并在 $x=y=0$ 以外的点 (x, y) 。验证:^②

① 関谷, 大岩, 藤沢: 工業技術者のための応用数学概要, いずみ書房 (1962), p. 144。

② 满足拉普拉斯方程式的函数称为调和函数 (harmonic function)。

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

(上式称为拉普拉斯(Laplace)方程)。且

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

成立。

[问 4.2] 设在边界 $x=0, a, y=0, b$ 上为简支的长方形弹性平板的挠度函数为:

$$f(x, y) = A \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (m, n = \text{正整数})$$

求

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

并问在长方形的四条边 $x=0, a$ 和 $y=0, b$ 上, 上式的值为多少?

4.3 偏导数的链式法则

在 $z=f(x, y)$ 中, 当 $x=\varphi(t), y=\psi(t)$ 时, 若将后面的两个式子代入第一个式子, 则 $z=f(\varphi(t), \psi(t))$, z 是 t 的一元函数。如果 $f(x, y)$ 对 x, y 的偏导数存在, x, y 对 t 可导, 则 f 对 t 也可导, 且有

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} \quad (4.7)$$

如果在 $z=f(x, y)$ 中的 x, y 是两个变量 ξ, η 的函数 $x=\varphi(\xi, \eta), y=\psi(\xi, \eta)$, 则 z 与 ξ, η 的函数关系为 $z=f(\varphi(\xi, \eta), \psi(\xi, \eta))$, 因此

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \xi} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial f}{\partial \eta} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{aligned} \right\} \quad (4.8)$$

式(4.7), 式(4.8)称为偏导数的链式法则(chain rule)。

[例 4.2] 已知 $z=f(x, y), x=a \cos t, y=b \sin t$ (a, b 为常数), 求 dz/dt 。

[解] $\frac{dx}{dt} = -a \sin t, \frac{dy}{dt} = b \cos t$

将它们代入式(4.7)得

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial y} b \cos t - \frac{\partial f}{\partial x} a \sin t$$

[例 4.3] 已知: $z = f(x, y)$, $x = \varphi(r, \theta) = r \cos \theta$, $y = \psi(r, \theta) = r \sin \theta$

求证:
$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)^2 \quad (4.9)$$

[解]
$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial f}{\partial y} \sin \theta$$

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta} = -\frac{\partial f}{\partial x} r \sin \theta + \frac{\partial f}{\partial y} r \cos \theta$$

$$\begin{aligned} \therefore \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)^2 &= \left(\frac{\partial f}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial f}{\partial y} \sin \theta\right)^2 + \left(-\frac{\partial f}{\partial x} \sin \theta + \frac{\partial f}{\partial y} \cos \theta\right)^2 \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \quad (\text{证毕}) \end{aligned}$$

[问 4.3] 已知: $z = f(x, y)$, $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$

求证:
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} \quad (4.10)$$

4.4 隐函数的求导

方程式
$$f(x, y) = 0 \quad (4.11)$$

中, 将 y 规定为 x 的隐函数(implicit function)。这时可知式(4.11)关于 y 的解为 $y = \psi(x)$, 即 y 是 x 的函数。

若在式(4.7)中考虑 $t = x$ 的特殊情况, 将式(4.11)的两边对 x 求导, 则

$$\begin{aligned} \frac{df}{dx} &= \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0 \\ \therefore \frac{dy}{dx} &= -\frac{\partial f / \partial x}{\partial f / \partial y} \quad (4.12) \end{aligned}$$

[例 4.4] 当 $x^2 + y^2 = a^2$ ($a = \text{常数}$) 时, 求 dy/dx 。

[解] 将给出的式子的右边移到左边, 并设

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - a^2 = 0$$

由此可得 $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y$

将它们代入式(4.12)得

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial f / \partial x}{\partial f / \partial y} = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y}$$

【例 4.5】 设 p 为气体的压力, v 为一定质量的气体的体积, T 为气体的绝对温度, 它们之间有下列的函数关系

$$f(p, v, T) = 0 \quad (4.13)$$

这称为状态方程式(equation of state)。在这种情况下验证下式成立。

$$\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_v \left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_T = -1 \quad (4.14)$$

式中所带的下标表示把该量视为常量时的情况。

【解】 在状态方程式(4.13)中, 首先将 p 视作常量, 左边只是 v 与 T 的函数, 由式(4.12)得

$$\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p = -\left(\frac{\partial f}{\partial T}\right)_{p,v} / \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)_{p,T} \quad (a)$$

同样, 在式(4.13)中将 v 看作常量, 则

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_v = -\left(\frac{\partial f}{\partial p}\right)_{v,T} / \left(\frac{\partial f}{\partial T}\right)_{p,v} \quad (b)$$

若将 T 视为常量, 则

$$\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_T = -\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)_{p,T} / \left(\frac{\partial f}{\partial p}\right)_{v,T} \quad (c)$$

由式(a)乘式(b)乘式(c)得到式(4.14)。

【问 4.4】 从下式求 dy/dx

$$(a) \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$(b) y = 1 - e^{x^2}$$

4.5 方向导数

设函数 $f(x, y)$ 在 x, y 平面的某个区域内具有偏导数 f_x, f_y 。如图 4.2 所示。作通过这个区域内的一点 $P(x, y)$ 的光滑曲线, 在该曲线上取 P 的附近的一点 $Q(x$

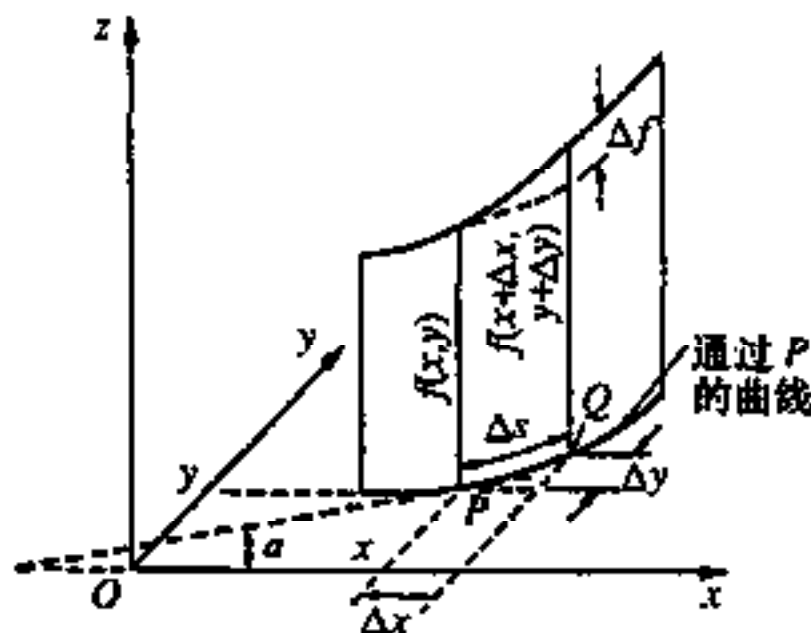


图 4.2 方向导数

$+ \Delta x, y + \Delta y$ 。设

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) = \Delta f$$

$$\widehat{PQ} = \Delta s$$

$$\frac{df}{ds} \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta s} \quad (4.15)$$

称为在点 P 的 $f(x, y)$ 的方向导数(directional derivative)。方向导数表示 $z = f(x, y)$ 在点 P 上的、沿 \widehat{PQ} 的切线方向的斜率(图 4.2)。

用从一定点开始测得的弧长 s , 以

$$x = x(s), \quad y = y(s) \quad (4.16)$$

来表示曲线 \widehat{PQ} 的方程时, 则根据式(4.7)和图 4.2, 有

$$\frac{df}{ds} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{ds} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \sin \alpha \quad (4.17)$$

式中, α 是在点 P 的 \widehat{PQ} 的切线方向与 x 轴间的夹角(图 4.2)。

在一定点 $P(x_0, y_0)$ 处选择不同的方向时, 这点的方向导数式(4.17)是 α 的函数

$$F(\alpha) = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_P \cos \alpha + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_P \sin \alpha \quad (4.18)$$

现在, 由于将 P 点考虑为一定点, 因此, 可以将上式中的 $(\partial f / \partial x)_P, (\partial f / \partial y)_P$ 考虑为常数。设 $(\partial f / \partial x)_P, (\partial f / \partial y)_P$ 不同时为零^①, 式(4.18)可改写为

$$F(\alpha) = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_P^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_P^2} \left\{ \frac{(\partial f / \partial x)_P}{\sqrt{(\partial f / \partial x)_P^2 + (\partial f / \partial y)_P^2}} \cos \alpha + \frac{(\partial f / \partial y)_P}{\sqrt{(\partial f / \partial x)_P^2 + (\partial f / \partial y)_P^2}} \sin \alpha \right\} \quad (4.19)$$

在上式中考虑将 $((\partial f / \partial x)_P, (\partial f / \partial y)_P)$ 设为如图 4.3 的 x, y 平面上的向量, 将这个向量用 $(\text{grad} f)_P$ 或 $(\nabla f)_P$ 表示。^② 设 $(\text{grad} f)_P$ 的从 x 方向测得的角度为 β , 则式(4.19)为

① 若 $(\partial f / \partial x)_P, (\partial f / \partial y)_P$ 同时为零, 即 $(\partial f / \partial x)_P = (\partial f / \partial y)_P = 0$, 则在点 (x_0, y_0) 的邻近处, $f(x, y)$ 为常数, 而 $F(\alpha) = 0$ 这种没有价值的情况除外。

② ∇ 称为微分算子(nabla)。关于 grad, ∇ , 将在第六章详细阐述。

$$\begin{aligned}
 F(\alpha) &= \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_P^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_P^2} (\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta) \\
 &= \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_P^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_P^2} \cos(\alpha - \beta)
 \end{aligned} \quad (4.20)$$

式中对最后部分的变形用了余弦的加法定理。另外,在上面这些式子中 $\sqrt{(\partial f/\partial x)_P^2 + (\partial f/\partial y)_P^2}$ 中的 $(\partial f/\partial x)_P$ 和 $(\partial f/\partial y)_P$ 为向量 $(\text{grad } f)_P$ 或 $(\nabla f)_P$ 的 x, y 方向的分量,它们的大小为 $|(\text{grad } f)_P|$ 或 $|(\nabla f)_P|$ 。

现在,因为将点 (x_0, y_0) 考虑为一定点,所以在式(4.20)中,除 α 以外都可以考虑为常量,式(4.20)是 α 的余弦函数。其图形如图 4.4。方向导数 $F(\alpha)$,在 $\alpha = \beta$ 时,有最大值 $\sqrt{(\partial f/\partial x)_P^2 + (\partial f/\partial y)_P^2}$,在 $\alpha = \beta + \pi$ 时有最小值 $-\sqrt{(\partial f/\partial x)_P^2 + (\partial f/\partial y)_P^2}$,即对于 $\alpha = \beta, \beta + \pi$ 的两个方向, $|F(\alpha)|$ 给出最大值

$$\left| \frac{df}{ds} \right|_{\max} = |F(\alpha)|_{\max} = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_P^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_P^2} = |(\text{grad } f)_P| = |(\nabla f)_P| \quad (4.21)$$

若将产生这个最大值的 α 的值 β 和 $\beta + \pi$,统一表示为 α_1 ,根据图 4.3、图 4.4 有

$$\tan \alpha_1 = \tan \beta = \tan(\beta + \pi) = \frac{(\partial f/\partial y)_P}{(\partial f/\partial x)_P} \quad (4.22)$$

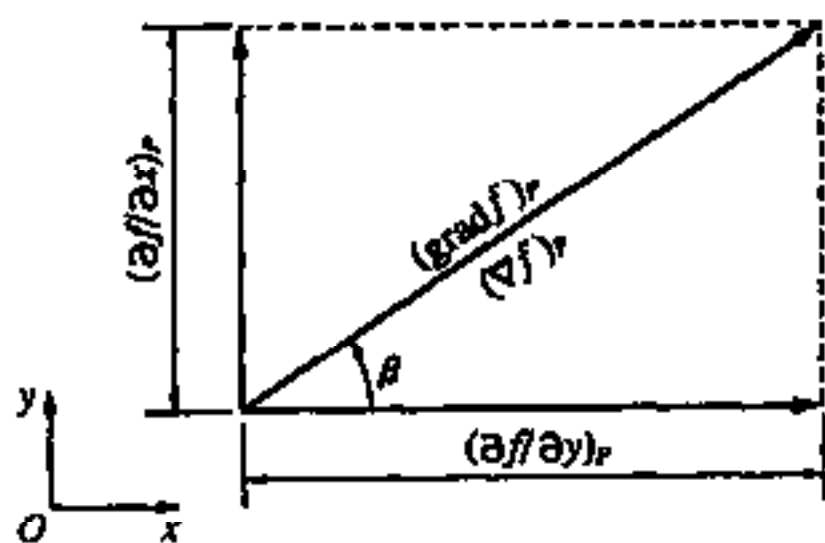


图 4.3 点 P 的斜率

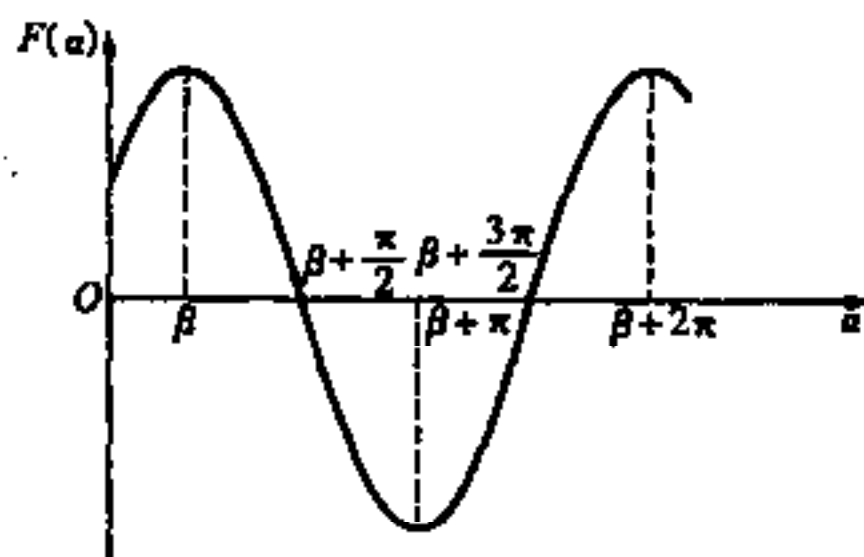


图 4.4 $F(\alpha)$ 的图形

下面来看方向导数 $F(\alpha)$ 为零的方向,由图 4.4 可见, $\alpha = \beta + (\pi/2)$ 和 $\beta + (3\pi/2)$, 所以从图 4.3、图 4.4 可知, $F(\alpha)$ 为零的方向是与 $\text{grad } f$ 正交的方向。若把这个方向统一设为 α_2 , 则

$$\tan \alpha_2 = \tan\left(\beta + \frac{\pi}{2}\right) = \tan\left(\beta + \frac{3\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\tan \beta} = -\frac{(\partial f/\partial x)_P}{(\partial f/\partial y)_P} \quad (4.23)$$

在 x, y 面上通过点 $P(x_0, y_0)$ 的由 $f(x, y) = c$ (常量) 形成的曲线称为等位线 (contour line 或 level curve)。对于位于点 P 的这条等位线的切线方向,由于 f 为常量,所以

该方向的方向导数为零,在点 P 的等位线的切线方向可以用式(4.23)的 α_2 给出。

由于 α_1 的方向与 α_2 的方向正交,所以方向导数的绝对值为最大的方向,即 $(\text{grad } f)_P$ 的方向,也就是 $z=f(x,y)$ 图形的曲面的最大倾斜度的方向与等位线的方向正交。

【例 4.6】 电位 V 用 $V=\log\sqrt{x^2+y^2}$ 给出时,求 V 的最大变化率的大小和方向。

【解】 向量的大小可以用式(4.21)、方向可以用式(4.22)求得:

$$V=\frac{1}{2}\log(x^2+y^2)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x}=\frac{1}{2}\frac{2x}{x^2+y^2}=\frac{x}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial V}{\partial y}=\frac{y}{x^2+y^2}$$

$$\begin{aligned} |\text{grad } V| &= \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)^2 + \left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad (\text{大小}) \end{aligned}$$

$$\tan \alpha_1 = \frac{\partial V / \partial y}{\partial V / \partial x} = \frac{y/(x^2+y^2)}{x/(x^2+y^2)} = \frac{y}{x}$$

所以方向是从原点 $(0,0)$ 指向点 (x,y) 的方向。

【问 4.5】 点 $(0,a)$ ($a>0$) 处的电位为

$$V=\log \frac{\sqrt{(x-a)^2+y^2}}{\sqrt{(x+a)^2+y^2}}$$

求它的梯度的大小和方向。

4.6 全微分

若 x,y 的函数 $X(x,y), Y(x,y)$ 有如下关系:

$$X(x,y)dx+Y(x,y)dy$$

将其作为某函数 $f(x,y)$ 的微分 df 表示时,即写为

$$df=X(x,y)dx+Y(x,y)dy \quad (4.24)$$

时,式右边称为全微分(total differential, exact differential)。由于在式(4.24)中,若设 y 为常数,则 $dy=0$,若设 x 为常数,则 $dx=0$,所以可得

$$X(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad Y(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y} \quad (4.25)$$

将式(4.25)代入式(4.24)得

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \quad (4.26)$$

式(4.25)为全微分的必要充分条件是:

$$\frac{\partial X(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial Y(x, y)}{\partial x} \quad (4.27)$$

式中, X, Y, X_y, Y_x 是连续的(证明略)^①。

【例 4.7】 证明 $(2x-y+1)dx + (2y-x+1)dy$ 是全微分,并求其作为全微分所具有的函数 $f(x, y)$ 。

【解】 若设:

$$X(x, y) = 2x - y + 1$$

$$Y(x, y) = 2y - x + 1$$

则

$$\partial X / \partial y = -1 \quad \partial Y / \partial x = -1$$

$$\therefore \partial X / \partial y = \partial Y / \partial x$$

因此,式(4.27)成立,给出的微分是全微分。

$$\partial f / \partial x = X = 2x - y + 1 \quad (a)$$

$$\therefore \partial f / \partial y = Y = 2y - x + 1 \quad (b)$$

若将 y 视为常数,对式(a)积分,得

$$f(x, y) = x^2 - xy + x + \varphi(y) \quad (c)$$

式中, $\varphi(y)$ 为任意函数^②。

因此,若设式(c)对 y 求偏导后的式子与式(b)相等,即

$$\partial f / \partial y = -x + \varphi'(y) = 2y - x + 1$$

① C. R. ワイリー(富久訳):工業数学(上),ブレイン図書出版(1962),p. 14。

② 因为将 y 视为常数积分,所以,积分常数中可包含 y ,因此,积分常数为 y 的任意函数 $\varphi(y)$ 。

$$\therefore \varphi'(y) = 2y + 1$$

$$\therefore \varphi(y) = y^2 + y + C \quad (\text{d})$$

式中, C 为积分常数。

将式(d)代入式(c)得

$$f(x, y) = x^2 - xy + x + y^2 + y + C \quad (\text{答})$$

[问 4.6] 求证 $\frac{1+y^2}{x^3}dx - \frac{1+x^2}{x^2}ydy$ 是全微分, 并求其作为全微分所具有的函数 $f(x, y)$ 。

4.7 雅可比

当 $x = \varphi(\xi, \eta)$, $y = \psi(\xi, \eta)$ 时, 称行列式

$$\begin{vmatrix} \varphi_{\xi} & \varphi_{\eta} \\ \psi_{\xi} & \psi_{\eta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \quad (4.28)$$

为 (x, y) 的关于 (ξ, η) 的雅可比 (Jacobian) 行列式或函数行列式 (functional determinant)。

同样, 当 $x = \varphi(\xi, \eta, \zeta)$, $y = \psi(\xi, \eta, \zeta)$, $z = \chi(\xi, \eta, \zeta)$ 时, 雅可比行列式为

$$\begin{vmatrix} \varphi_{\xi} & \varphi_{\eta} & \varphi_{\zeta} \\ \psi_{\xi} & \psi_{\eta} & \psi_{\zeta} \\ \chi_{\xi} & \chi_{\eta} & \chi_{\zeta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{vmatrix} \quad (4.29)$$

当 $x_1 = \varphi_1(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$, $x_2 = \varphi_2(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$, \dots , $x_n = \varphi_n(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ 时, 雅可比行列式

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} & \dots & \frac{\partial x_1}{\partial \xi_n} \\ \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} & \dots & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial x_n}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_n}{\partial \xi_2} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial \xi_n} \end{vmatrix} \quad (4.30)$$

往往将雅可比行列式(4.28)、式(4.29)、式(4.30)简记为

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \eta)}, \quad \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\xi, \eta, \zeta)}, \quad \frac{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)} \quad (4.31)$$

[例 4.8] 当 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ 时, 求雅可比行列式 $\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)}$

[解] $\frac{\partial x}{\partial r} = \cos \theta, \frac{\partial x}{\partial \theta} = -r \sin \theta, \frac{\partial y}{\partial r} = \sin \theta, \frac{\partial y}{\partial \theta} = r \cos \theta$

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = r \quad (4.32)$$

[问 4.7] 当 $x = \rho \cos \varphi \sin \theta, y = \rho \sin \varphi \sin \theta, z = \rho \cos \theta$ 时, 求雅可比行列式 $\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \varphi, \theta)}$

[问 4.8] 求证

$$\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(\xi, \eta)} = \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(x, y)} \frac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \eta)} \quad (4.33)$$

[提示] 可以用式(4.8)。因为行列式的积与矩阵的积一样, 所以, 可按照下式进行证明:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{vmatrix}$$

下面列举关于雅可比行列式的二三个定理^①。

(a) 两个式子

$$\left. \begin{aligned} x &= \varphi(\xi, \eta) \\ y &= \psi(\xi, \eta) \end{aligned} \right\} \quad (4.34)$$

中能解得 ξ 和 η 的充分必要条件是雅可比行列式

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \eta)} \quad (4.35)$$

存在。

(b) 使式(4.34)的 x 和 y 之间存在函数关系的必要充分条件是式(4.35)的雅可

^① 详细情况请参照: 寺沢: 自然科学者のための数学概論(増訂版), 岩波(1954)。

比行列式为零。

(c) 若考虑用

$$\left. \begin{aligned} x &= \varphi(\xi, \eta, \zeta) \\ y &= \psi(\xi, \eta, \zeta) \\ z &= \chi(\xi, \eta, \zeta) \end{aligned} \right\} \quad (4.36)$$

代替式(4.34), 用

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\xi, \eta, \zeta)} \quad (4.37)$$

代替式(4.35), 则有与(a), (b)完全相同的定理成立。

通常, 对于 n 元的函数

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \varphi_1(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \\ x_2 &= \varphi_2(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \\ &\dots\dots\dots \\ x_n &= \varphi_n(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \end{aligned} \right\} \quad (4.38)$$

也是一样的。

[例 4.9] 设 a, b, c, f, g, h 为常数时, 对于函数

$$\left. \begin{aligned} x &= a\xi + b\eta + c \\ y &= f\xi + g\eta + h \end{aligned} \right\} \quad (4.39)$$

验证上述定理(a)、(b)。

$$[\text{解}] \quad \frac{\partial x}{\partial \xi} = a, \quad \frac{\partial x}{\partial \eta} = b, \quad \frac{\partial y}{\partial \xi} = f, \quad \frac{\partial y}{\partial \eta} = g$$

$$\therefore \frac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \eta)} = \begin{vmatrix} a & b \\ f & g \end{vmatrix}$$

若这个函数行列式不为零, 则式(4.39)关于 ξ, η 的解可以得到。但是, 假如雅可比行列式为零, 即

$$ag - bf = 0 \quad (a)$$

将式(a)代入式(4.39)的第一式的 g 倍减去第二式的 b 倍的结果中去, 得

$$gx - by = cg - bh$$

这就是 x 与 y 的函数关系。

4.8 多元函数的泰勒展开

讨论二元的情况。对于三元以上的多元的情况也是完全相同的,可以类推。

一元时的马克劳林(Maclaurin)公式,对于 n 阶的 t 的函数 $F(t)$,有

$$F(t) = F(0) + F'(0)t + \frac{F''(0)}{2!}t^2 + \cdots + \frac{F^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}t^{n-1} + R_n \quad (4.40)$$

式中

$$R_n \equiv \frac{F^{(n)}(\theta t)}{n!}t^n, \quad 0 < \theta < 1$$

现在,对函数 $f(x, y)$, 设

$$F(t) = f(x+ht, y+kt) \quad (4.41)$$

若求其导数,根据式(4.7)为

$$\left. \begin{aligned} F'(t) &= \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right) f(x+ht, y+kt) \\ F''(t) &= \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 f(x+ht, y+kt) \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \right\} \quad (4.42)$$

在式(4.42)中取 $t=0$, 则

$$\left. \begin{aligned} F'(0) &= \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right) f(x, y) \\ F''(0) &= \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 f(x, y) \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \right\} \quad (4.43)$$

将式(4.41)、式(4.43)代入式(4.40), 并设 $t=1$, 各阶数的导数存在, 对于 $n \rightarrow \infty$, 当 $R_n \rightarrow 0$ 时, 得

$$\begin{aligned} f(x+h, y+k) &= f(x, y) + \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right) f(x, y) \\ &\quad + \frac{1}{2!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 f(x, y) + \dots\dots\dots \\ &\quad + \frac{1}{n!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^n f(x, y) + \dots \end{aligned} \quad (4.44)$$

这就是二元函数的泰勒展开(Taylor's expansion)。

习题 4

4.1 求下面函数的偏导数 $\partial z/\partial x, \partial z/\partial y$ 。

(a) $z = ax^2 + 2bxy + cy^2$

(b) $z = (ax + by)/(cx + dy)$

(c) $z = (x^2 + y^2) \arctan \frac{y}{x}$

4.2 求证牛顿(Newton)万有引力的势函数

$$f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

对于 $x=y=z=0$ 以外的 x, y, z , 满足拉普拉斯(Laplace)方程式 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$ 。

4.3 如果 $x = e^t \cos \eta, y = e^t \sin \eta, z = V(x, y)$

求证
$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = e^{-2t} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial \eta^2} \right)$$

4.4 根据下式求 dy/dx

(a) $y^n = \frac{x+y}{x-y}$ (b) $1 - 2xy = \log(e^{xy} + e^{-xy})$

4.5 根据 $f(x, y) = 0$ 推导求二阶导数 $d^2 y/dx^2$ 的公式。

4.6 求 $f(x, y) = e^{-y} \sin x + \frac{1}{3} e^{-3y} \sin 3x$ 在点 $(2\pi/3, 0)$ 上的梯度的大小和方向。

4.7 求下列函数的全微分

(a) $\frac{1}{2}(x^2 + y^2)$

(b) xy

(c) $\log \sqrt{x^2 + y^2}$

(d) $\arctan \frac{x-y}{1+xy}$

4.8 证明 $\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx + \left(-1 + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) dy$ 是全微分, 并求其作为全微分所具有的函数

$f(x, y)$ 。

4.9 求证 $\frac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \eta)} \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} = 1$

4.10 由 $x = \varphi(\xi, \eta), y = \psi(\xi, \eta)$ 组成的两个函数, 满足柯西-黎曼(Cauchy Riemann)方程式

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} = \frac{\partial \psi}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = -\frac{\partial \psi}{\partial \xi}$$

如果 x, y 是 V 的函数, 求证:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial \eta^2} = \left\{ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right)^2 \right\} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right)$$

成立。

4.11 求证函数 $f(x, y) = (x^2 + y^2) \log(x^2 + y^2)$ 在除 $x = y = 0$ 以外的点 (x, y) 满足重调和方程式(biharmonic equation)

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 f}{\partial y^4} = 0 \textcircled{1}$$

① 满足重调和方程式的函数称为重调和函数(biharmonic function)。它是求解弹性平板问题和粘性不可压缩性流体的定常二维运动时的必要函数。

第5章 定积分

5.1 定积分的定义和计算

设 $f(x)$ 为在有限区间 $a \leq x \leq b$ 上连续的函数。若将如图 5.1 所示的 x 轴上的上述区间设为 AB , 并将 AB n 等分, 每一分割的宽为 $\Delta x = (b-a)/n$, 分点 A_k 的坐标为 $x_k = a + k\Delta x$, ($k=1, 2, \dots, n-1$), 在 $x=x_k$ 处的 $f(x)$ 的值是

$$y_k = f(x_k) = f(a + k\Delta x) \quad (5.1)$$

现在若设 $f(x_k) > 0$, 则 $f(x_k)\Delta x$ 表示图中涂上阴影部分的面积。若 $f(x_k) < 0$ 时, 则 $f(x_k)\Delta x$ 为负的这个面积。这种带有正负符号的面积代数之和可以用 $\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\Delta x$ 给出, 设 $n \rightarrow \infty$ (因此 $\Delta x \rightarrow 0$)

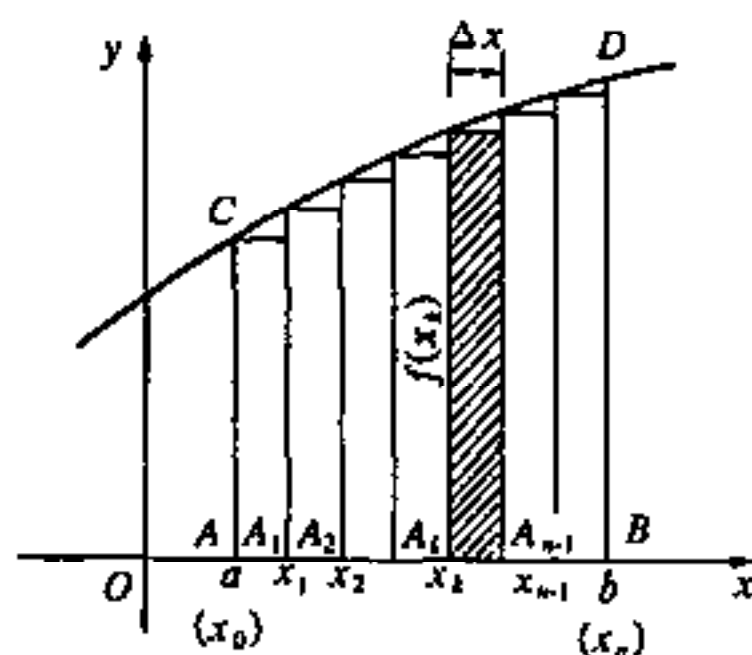


图 5.1 定积分

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \Delta x$$

在图 5.1 的例子中为 $ABCD$ 的面积, 用这个式子给出的极限可以记为 $\int_a^b f(x) dx$, 称为 $f(x)$ 的从 a 到 b 的定积分 (definite integral) 即

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \Delta x \quad (5.2)$$

求这个值称为函数 $f(x)$ 从 a 到 b 的积分 (integrate), a 为定积分的下限 (lower limit), b 为定积分的上限 (upper limit)。另外, 规定

$$\left. \begin{aligned} \int_b^a f(x) dx &= - \int_a^b f(x) dx \\ \int_a^a f(x) dx &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.3)$$

如图 (5.2) 所示, 在区间 $a \leq x \leq b$ 内, 如果

$$m \leq f(x) \leq M^{\text{①}} \quad (5.4)$$

则
$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a) \quad (5.5)$$

因此, 如果 $a \neq b$, 则与 a, b 的大小无关

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x) dx}{b-a} \leq M \quad (5.6)$$

或将下限固定为一定值 a , 则定积分 $\int_a^b f(x) dx$ 就由上限 b 确定, 所以它是 b 的函数。因此, 将上限 b 改记为 x , 考虑函数

$$S(x) = \int_a^x f(x) dx = \int_a^x f(t) dt \quad (5.7)$$

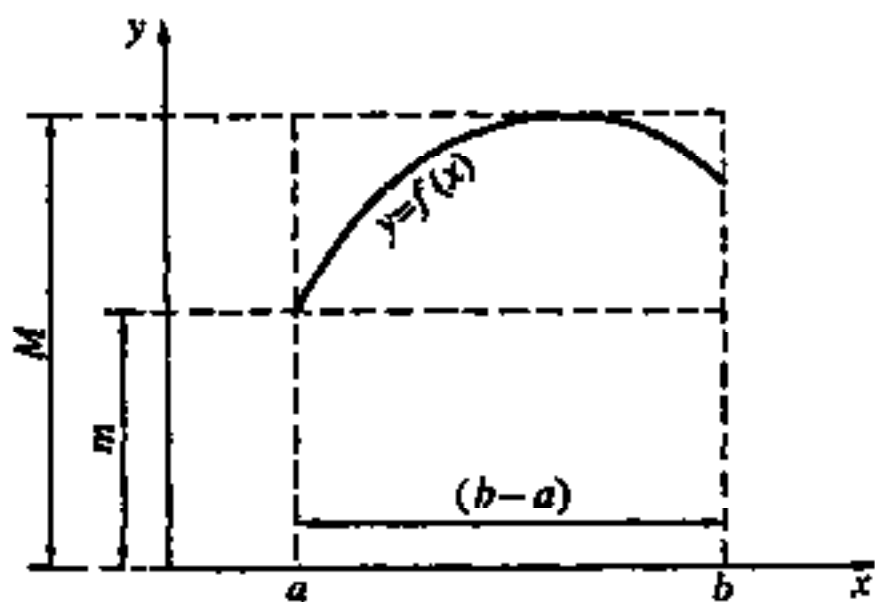


图 5.2 $f(x)$ 的最大值和最小值

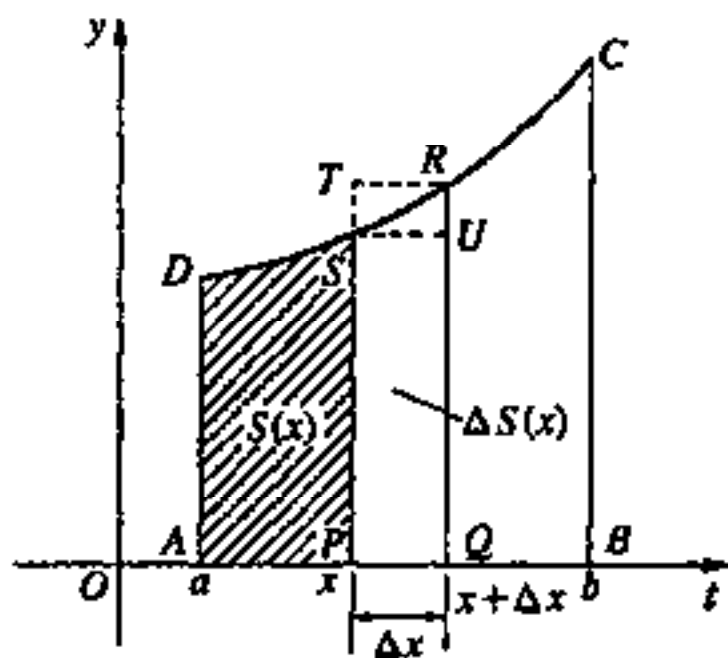


图 5.3 面积的变化率

对 $f(t) \geq 0$ 的情况而言, 如图 5.3 所示, $S(x)$ 表示用曲线 $y = f(x)$ 和 $t = a, t = x, y = 0$ (t 轴) 围成的 APSD 的面积。

若设 $\Delta x > 0$

$$\Delta S(x) = S(x + \Delta x) - S(x)$$

则 $\Delta S(x) = \text{面积}(AQRD) - \text{面积}(APSD)$

$$= \text{面积}(PQRS) = \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt$$

设在闭区间 $[x, x + \Delta x]$ 上的 $f(t)$ 的最大值, 最小值分别为 $M, m^{\text{②}}$, 由式(5.6)得

① 有界闭区间的连续函数在此有界区间上达到最大、最小值(Weierstrass)魏尔斯脱拉斯定理。高木: 解析概論(改訂第3版), 岩波(1961), p. 27。

② 见前(Weierstrass)定理。

$$m \leq \frac{\int_x^{x+\Delta x} f(t) dt}{\Delta x} = \frac{\Delta S(x)}{\Delta x} \leq M$$

令 $\Delta x \rightarrow 0$, 因为 $m, M \rightarrow f(x)$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta S(x)}{\Delta x} = f(x)$$

所以

$$S'(x) = f(x) \quad (5.8)$$

将式(5.7)代入式(5.8)

$$\frac{d}{dx} \left\{ \int_a^x f(t) dt \right\} = f(x) \quad (5.9)$$

因此,若设 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的不定积分的一种,则

$$S(x) = \int_a^x f(t) dt = F(x) + C \quad (5.10)$$

若设 $x = a$, 根据式(5.3)第二式,得

$$S(a) = \int_a^a f(t) dt = 0 = F(a) + C$$

所以

$$C = -F(a) \quad (5.11)$$

又,若在式(5.10)中设 $x = b$, 则

$$S(b) = \int_a^b f(t) dt = F(b) + C \quad (5.12)$$

将式(5.11)代入式(5.12),得

$$S(b) = \int_a^b f(t) dt = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a) \quad (5.13)$$

式中, $[F(x)]_a^b$ 是在 $F(x)$ 中用 b 代入 x 所得的结果减去用 a 代入 x 所得结果的差。

定积分有下面性质:

$$(a) \int_a^b \{f(x) \pm g(x)\} dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx \quad (5.14)$$

$$(b) \int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx \quad (k = \text{常数}) \quad (5.15)$$

$$(c) \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \quad (5.16)$$

5.2 定积分定义的扩大

对于上节所述的定积分,是有上下限的,被积函数在上下限之间的区间内被定义为连续的,在本节,将定积分的定义扩大至不满足这些条件的情况。

首先,将式

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx, \quad \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx, \quad \lim_{\substack{b \rightarrow \infty \\ a \rightarrow -\infty}} \int_a^b f(x) dx$$

具有确定的极限值时,分别将它们定义为

$$\int_a^\infty f(x) dx, \quad \int_{-\infty}^b f(x) dx, \quad \int_{-\infty}^\infty f(x) dx$$

接着,考虑 $a < b$, 被积函数 $f(x)$ 在 $x = a$ 处不连续,在其他点连续时,而 $\lim_{\epsilon \rightarrow +0} \int_{a+\epsilon}^b f(x) dx$ 具有确定的值,定义为

$$\int_a^b f(x) dx$$

同样, $f(x)$ 只在 $x = b$ 处为不连续时,定义为

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \int_a^{b-\epsilon} f(x) dx \quad (5.17)$$

另外, $f(x)$ 仅在区间 (a, b) 内的一点 c 处为不连续时,定义为

$$\int_a^b f(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \int_a^{c-\epsilon} f(x) dx + \lim_{\epsilon' \rightarrow +0} \int_{c+\epsilon'}^b f(x) dx \quad (5.18)$$

在式(5.18)中当 $\epsilon = \epsilon'$ 时,即

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \int_a^{c-\epsilon} f(x) dx + \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \int_{c+\epsilon}^b f(x) dx \quad (5.19)$$

的右边极限如果存在,则称其为函数 $f(x)$ 的在区间 $a \leq x \leq b$ 内的积分的柯西主值(Cauchy's principal value of integral)

5.3 定积分的工程应用

A. 在水力学中的应用(流过堰的流量)

如图 5.4(a) 所示,在水路途中有堤坝时,考虑流过堤坝的流量(每单位时间的体积)。这时,如图(b),将在堤坝处的水的截面分成等间隔的细条的水平带状,从上往下按顺序编号为 $1, 2, \dots, n$ 。设第 i 号带上端的宽度为 b_i ,带的厚度为 Δy 。又设从水面

到第 i 号带的深度为 y_i , 在其上端的流速根据托里拆利 (Torricelli) 定理为 $\sqrt{2gy_i}$, 故通过第 i 带的流量为

$$\Delta Q_i = C_d \sqrt{2gy_i} b_i \Delta y \quad (5.20)$$

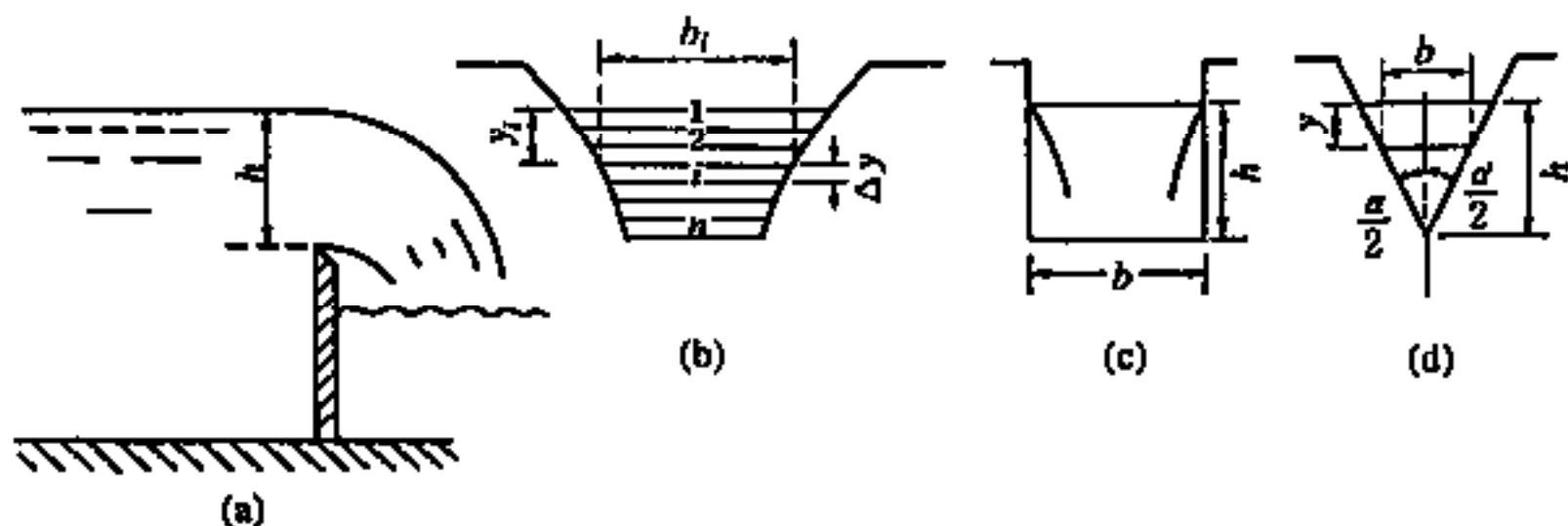


图 5.4 流过堰的流量

式中, C_d 是表示摩擦或流过横截面积的收缩等影响的常数称为流量系数 (coefficient of discharge)。对于全部的带这样的流量之合计

$$\sum_{i=1}^n \Delta Q_i = \sum_{i=1}^n C_d \sqrt{2gy_i} b_i \Delta y \quad (5.21)$$

当 $n \rightarrow \infty (\Delta y = h/n \rightarrow 0)$ 处的极限值

$$Q = \lim_{n \rightarrow \infty} C_d \sqrt{2gy_i} b_i \Delta y = \int_0^h C_d \sqrt{2gy} b dy \quad (5.22)$$

就表示流量。式中的 h 是如图 (a) 所示的从堤坝的顶部到水面的深度。

请看关于对各种具体的堤坝形式进行的以上计算。

[例 5.1] 推导在图 5.4(c) 中所示的长方形堤坝的流量公式。

[解] 这时, 由于宽度是一定的, 所以用式 (5.22) 能够很容易地计算

$$\begin{aligned} Q &= C_d \sqrt{2gb} \int_0^h y^{1/2} dy = C_d \sqrt{2gb} \frac{[y^{1+(1/2)}]_0^h}{1+(1/2)} \\ &= \frac{2}{3} C_d \sqrt{2gb} h^{3/2} \end{aligned} \quad (5.23)$$

[例 5.2] 推导图 5.4(d) 所示的三角形的流量公式

[解] 这时, 宽度可以用

$$b = 2(h - y) \tan \frac{\alpha}{2}$$

给出, 将其代入式 (5.22)

$$\begin{aligned}
 Q &= \int_0^h C_d \sqrt{2gy} \cdot 2(h-y) \tan \frac{\alpha}{2} dy \\
 &= 2C_d \sqrt{2g} \tan \frac{\alpha}{2} \int_0^h y^{1/2} (h-y) dy \\
 &= 2C_d \sqrt{2g} \tan \frac{\alpha}{2} \left[\frac{2}{3} h y^{3/2} - \frac{2}{5} y^{5/2} \right]_0^h \\
 &= \frac{8}{15} C_d \sqrt{2g} \tan \frac{\alpha}{2} h^{5/2} \quad (5.24)
 \end{aligned}$$

对于特殊的直角三角形, 因为 $\alpha = 90^\circ$, 所以

$$Q = \frac{8}{15} C_d \sqrt{2g} h^{\frac{5}{2}} \quad (5.25)$$

B. 在材料力学中的应用(惯性矩)

在梁抵抗弯曲的时候, 依靠与材质没有关系的截面几何学的形状的抵抗, 可以用下式定义的惯性矩 (geometrical moment of inertia, second moment of area)

$$I = \int_A y^2 dA \quad (5.26)$$

给出。在此取图 5.5 所示的坐标轴, 取截面重心即形心 (center of figure 简称为 C. F.) 为原点, 设截面形状与 y 轴对称, 梁的弯曲力矩即弯矩 (bending moment) 绕截面内的 x 轴回转。 dA 是在截面内所取的微小面积, y 是表示微小面积 dA 的位置 y 的坐标。 \int_A 的 A 表示对整个截面 A 的积分。

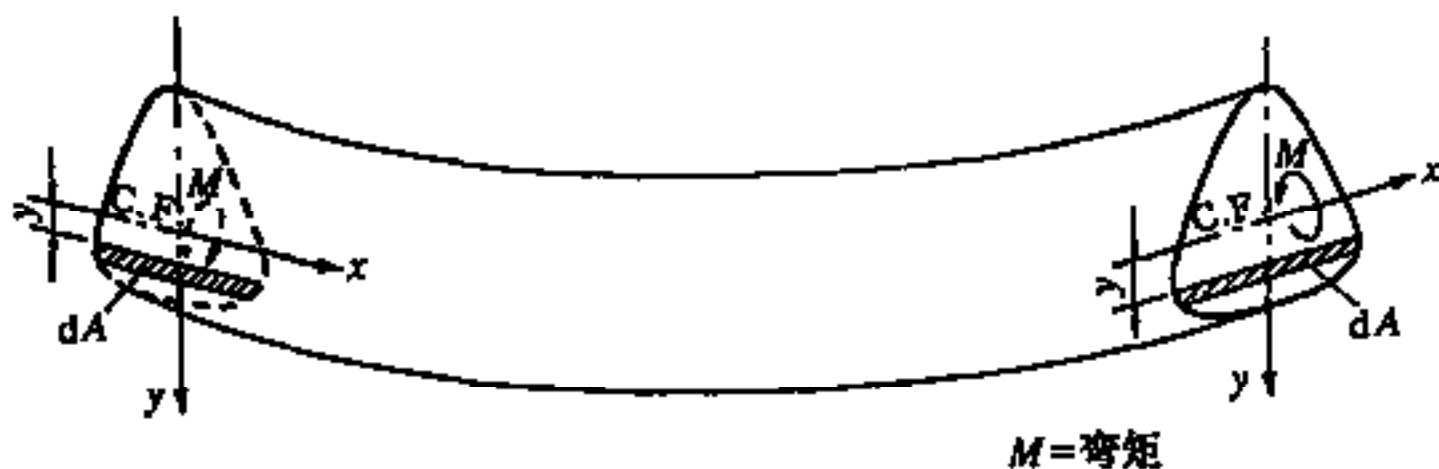


图 5.5 对称梁的弯曲

[例 5.3] 求长方形截面梁的惯性矩。

[解] 截面形状如图 5.6 所示。图中打斜线的部分是微小面积 dA 。

从图中知

$$dA = bdy$$

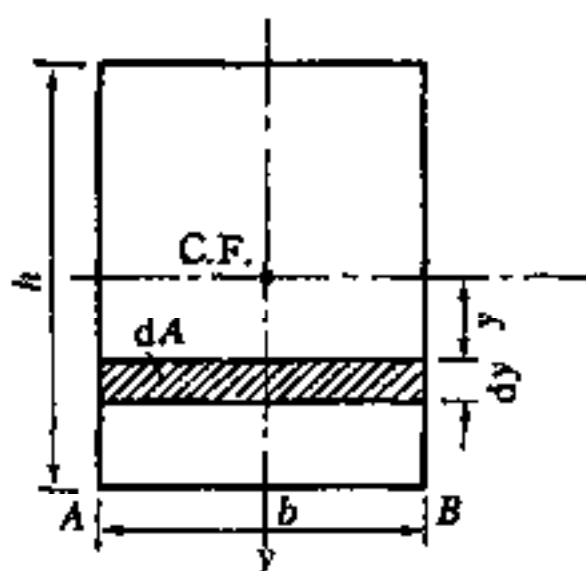


图 5.6 长方形截面梁的惯性矩

将它代入式(5.26)得

$$\begin{aligned}
 I &= \int_{-(h/2)}^{h/2} y^2 b dy = b \left[\frac{y^3}{3} \right]_{-(h/2)}^{h/2} \\
 &= \frac{b}{3} \left\{ \left(\frac{h}{2} \right)^3 - \left(-\frac{h}{2} \right)^3 \right\} = \frac{b}{3} \cdot \frac{h^3}{4} = \frac{bh^3}{12} \quad (5.27)
 \end{aligned}$$

【例 5.4】 求圆截面梁的惯性矩。

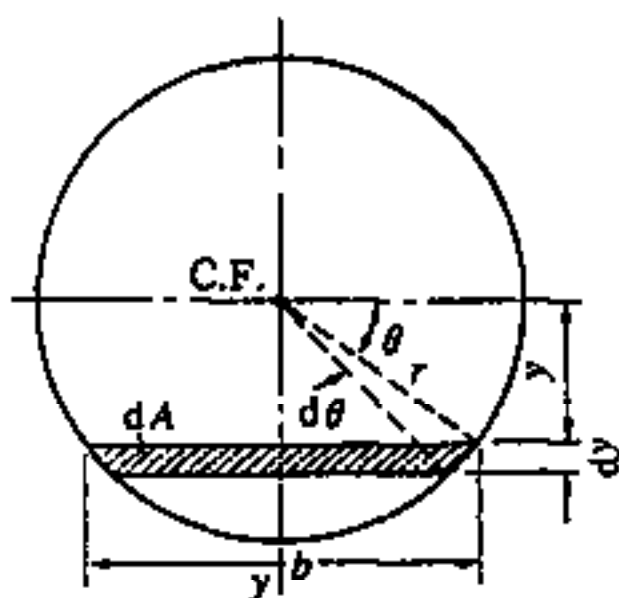


图 5.7 圆截面梁的惯性矩 故

【解】 截面形状如图 5.7 所示。直角坐标 (x, y) 代入以如图所示的极坐标 (r, θ) 。由图知

$$b = 2r \cos \theta, y = r \sin \theta$$

$$\therefore dy = r \cos \theta d\theta$$

$$\begin{aligned}
 \therefore dA &= b dy = 2r \cos \theta \cdot r \cos \theta d\theta \\
 &= 2r^2 \cos^2 \theta d\theta
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I &= \int_A y^2 dA \\
 &= \int_{-(\pi/2)}^{\pi/2} r^2 \sin^2 \theta \cdot 2r^2 \cos^2 \theta d\theta \\
 &= \frac{r^4}{2} \int_{-(\pi/2)}^{\pi/2} (2 \sin \theta \cos \theta)^2 d\theta \\
 &= \frac{r^4}{2} \int_{-(\pi/2)}^{\pi/2} \sin^2 2\theta d\theta \\
 &= \frac{r^4}{4} \int_{-(\pi/2)}^{\pi/2} (1 - \cos 4\theta) d\theta
 \end{aligned}$$

$$= \frac{r^4}{2} \left[\theta - \frac{\sin 4\theta}{4} \right]_{-(\pi/2)}^{\pi/2} = \frac{\pi r^4}{4}$$

在工程中,因为采用直径 d 表示的情况很多,所以将 $r = d/2$ 代入上式得

$$I = \frac{\pi d^4}{64} \quad (5.28)$$

由于式(5.27)、式(5.28)在工程上是重要的公式,所以要把它们背下来。

5.4 含参变量的积分的微分法(莱布尼茨公式)

a, b 为常数时,设含参变量 ξ 的函数的积分

$$I(\xi) = \int_a^b f(x, \xi) dx \quad (5.29)$$

的导数为 $I'(\xi)$, 考虑在怎样的条件下, 下面

$$I'(\xi) = \frac{d}{d\xi} \int_a^b f(x, \xi) dx = \int_a^b \frac{\partial f(x, \xi)}{\partial \xi} dx \quad (5.30)$$

即可以交换积分运算与求导运算的顺序。

设对 ξ 给出增量 $\Delta\xi$ 时的 $I(\xi)$ 的增量为 ΔI , 由式(5.29)和式(5.14)得

$$\begin{aligned} \Delta I &= I(\xi + \Delta\xi) - I(\xi) = \int_a^b f(x, \xi + \Delta\xi) dx - \int_a^b f(x, \xi) dx \\ &= \int_a^b [f(x, \xi + \Delta\xi) - f(x, \xi)] dx \end{aligned} \quad (5.31)$$

如果 $f(x, \xi)$ 在 $a \leq x \leq b, a \leq \xi \leq \beta$ 的区间内是 x, ξ 的连续函数, 则关于这个闭区间的 $x, \xi, f(x, \xi)$ 一致连续的^①, 即对于任意小的正数 ϵ , 取与 x, ξ 无关的比适当正数 δ 小的 $|\Delta\xi|$ ($|\Delta\xi| < \delta$), 下式也能成立。

$$|f(x, \xi + \Delta\xi) - f(x, \xi)| < \epsilon \quad (5.32)$$

这种情况, 在图 5.8 中的 $CDD'C'$ 的垂直方向的宽度, 对于全部的 x , 意味着比 ϵ 小。因此, 将式(5.32)两边对 x 在 a, b 之间积分, 并代入式(5.31)得

$$\Delta I = \int_a^b [f(x, \xi + \Delta\xi) - f(x, \xi)] dx < \epsilon(b-a) \quad (5.33)$$

式中, $I(\xi)$ 是 ξ 的连续函数, 式(5.31)的两边分别除以 $\Delta\xi$ 得

^① 闭区间连续函数一致连续 高木: 解析概論(改訂第3版), 岩波(1961)p. 27 ~ p. 28。

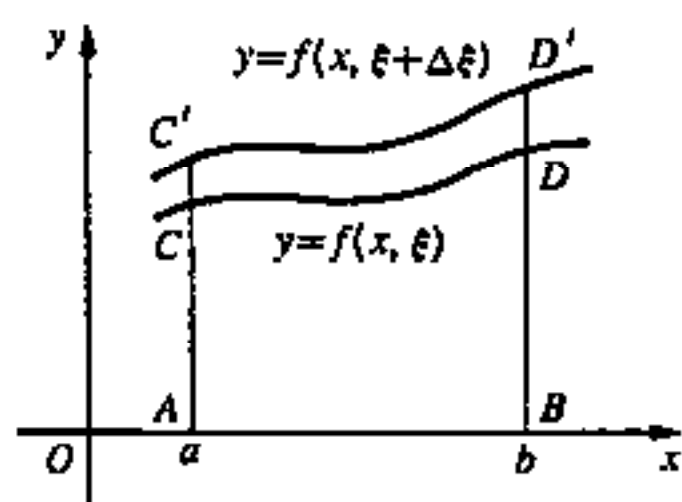


图 5.8 含参变量积分的微分法
(上、下限为常数)

$$\frac{\Delta I}{\Delta \xi} = \int_a^b \frac{f(x, \xi + \Delta \xi) - f(x, \xi)}{\Delta \xi} dx \quad (5.34)$$

如果 $\partial f / \partial \xi$ 存在且连续, 则可以写为

$$\frac{f(x, \xi + \Delta \xi) - f(x, \xi)}{\Delta \xi} = \frac{\partial f}{\partial \xi} + \eta \quad (5.35)$$

式中, η 对于 $\Delta \xi \rightarrow 0$, 取 $\eta \rightarrow 0$ 。将式(5.35)代入式(5.34)得

$$\frac{\Delta I}{\Delta \xi} = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial \xi} dx + \eta(b-a)$$

两边取 $\Delta \xi \rightarrow 0$, 得

$$I'(\xi) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial \xi} dx \quad (5.36)$$

因此, 当函数 $f(x, \xi)$ 具有连续的偏导数 $\frac{\partial f}{\partial \xi}$ 时, 为了式(5.29)对 ξ 微分, 可以交换积分与微分的顺序为

$$\frac{dI}{d\xi} = \frac{d}{d\xi} \int_a^b f(x, \xi) dx = \int_a^b \frac{\partial}{\partial \xi} f(x, \xi) dx^{\text{①}} \quad (5.37)$$

在式(5.29)中 a, b 是 ξ 的连续函数 $a = a(\xi), b = b(\xi)$, 当 ξ 变化 $\Delta \xi$ 时, 设 a, b 变化 $\Delta a, \Delta b$ 。这时

$$\begin{aligned} I(\xi + \Delta \xi) &= \int_{a+\Delta a}^{b+\Delta b} f(x, \xi + \Delta \xi) dx \\ &= \int_{a+\Delta a}^a f(x, \xi + \Delta \xi) dx + \int_a^b f(x, \xi + \Delta \xi) dx + \int_b^{b+\Delta b} f(x, \xi + \Delta \xi) dx \end{aligned} \quad (5.38)$$

因此, 由式(5.38)减去式(5.29)得

$$\begin{aligned} \Delta I &= I(\xi + \Delta \xi) - I(\xi) \\ &= \int_{a+\Delta a}^a f(x, \xi + \Delta \xi) dx + \int_a^b [f(x, \xi + \Delta \xi) - f(x, \xi)] dx \\ &\quad + \int_b^{b+\Delta b} f(x, \xi + \Delta \xi) dx \end{aligned} \quad (5.39)$$

① 注意这里式(5.36)、式(5.37)需条件 $\frac{\partial f(x, \xi)}{\partial \xi}$ 连续。

在图 5.9 中, ΔI 正好是不带阴影的部分, 表示式(5.39)的三个积分各自所在领域 EAHG, CDJH, BFKJ 的面积. 这个图中表示的是 $\Delta b > 0, \Delta a < 0$ 的情况, 根据平均值的定理, 式(5.39)为^①

$$\Delta I = -\Delta a f(\xi_1, \xi + \Delta \xi) + \int_a^b [f(x, \xi + \Delta \xi) - f(x, \xi)] dx + \Delta b f(\xi_2, \xi + \Delta \xi) \quad (5.40)$$

式中, $a + \Delta a \leq \xi_1 \leq a, b \leq \xi_2 \leq b + \Delta b$, 两边除以 $\Delta \xi$, 并考虑 $\Delta \xi \rightarrow 0$ 的极限, 由于 a, b 是 ξ 的连续函数, 所以, 当 $\Delta a \rightarrow 0, \Delta b \rightarrow 0$ 时, $\xi_1 \rightarrow a, \xi_2 \rightarrow b$, 所以

$$I'(\xi) = \frac{dI}{d\xi} = \int_{a(\xi)}^{b(\xi)} \frac{\partial f}{\partial \xi} dx + f(b(\xi), \xi) \frac{db}{d\xi} - f(a(\xi), \xi) \frac{da}{d\xi} \quad (5.41)$$

这称为莱布尼茨公式(Leibnitz), 式(5.37)是上式中 $a(\xi), b(\xi)$ 为常数的特殊情况.

[问 5.1] 根据莱布尼茨公式推导积分法的基本定理

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(\xi) d\xi = f(x) \quad (5.42)$$

[问 5.2] 函数 $u(\xi)$ 用

$$u(\xi) = (\xi - 1) \int_0^\xi x \varphi(x) dx + \xi \int_\xi^1 (x - 1) \varphi(x) dx \quad (5.43)$$

给出时, 求证

$$u''(\xi) = \varphi(\xi) \quad (5.44)$$

在式(5.29)中, $b = \infty$ 为无限积分的情况, 设积分:

$$I(\xi) = \int_a^\infty f(x, \xi) dx \quad (5.45)$$

在参变量的变域 $\alpha \leq \xi \leq \beta$ 内一样收敛. 即任意给出 $\varepsilon > 0$ 时, 决定了与 ξ 无关的常数 $l_0, l > l_0$ 时, 在

$$\int_a^\infty f(x, \xi) dx = \int_a^l f(x, \xi) dx + \int_l^\infty f(x, \xi) dx \quad (5.46)$$

① $\int_{a+\Delta a}^a f(x, \xi + \Delta \xi) dx = -\int_a^{a+\Delta a} f(x, \xi + \Delta \xi) dx = -\Delta a f(\xi_1, \xi + \Delta \xi)$ (积分的第一中值定理)——高木: 解析概論(改

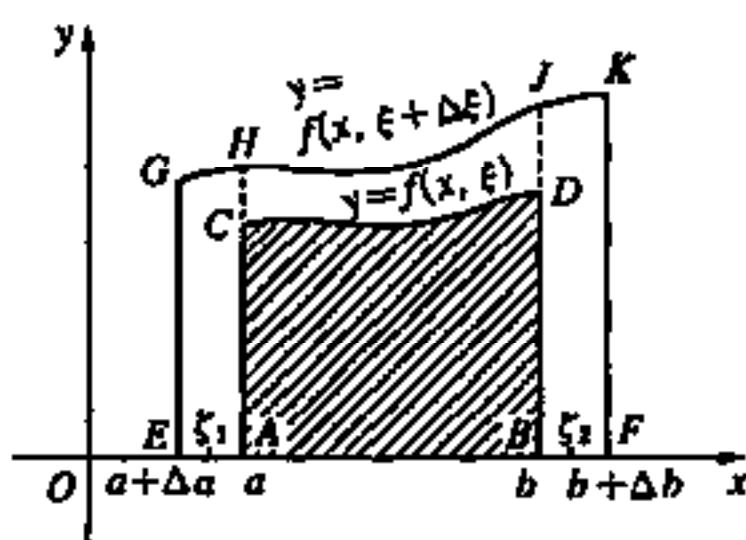


图 5.9 含参变量积分的微分法
(上、下限为参变量的函数时)

中,可以设

$$\left| \int_a^\infty f(x, \xi) dx \right| < \varepsilon \quad (5.47)$$

这时, $I(\xi)$ 为 ξ 的连续函数(证明略)。

另外, 设 $f_\xi(x, \xi)$ 在 x 的区间 (a, ∞) , ξ 的区间 (α, β) 内也是 x, ξ 的连续函数, 积分

$$\int_a^\infty f_\xi(x, \xi) dx$$

一样收敛(式(5.46), (5.47) 同样考虑)。这时

$$I'(\xi) = \int_a^\infty \frac{\partial f(x, \xi)}{\partial \xi} dx \quad (5.48)$$

成立(证明略)。

5.5 被积函数为无界时的定积分和无限积分

在积分

$$\int_a^b f(x) dx \quad (5.49)$$

中考虑 $f(x)$ 对于 $x = b$ 为无界的情况, 当在 $a < c < b$ 的 c 处为无限大时考虑

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx - \int_b^c f(x) dx \quad (5.50)$$

由于式(5.50)右边的两个积分与式(5.49)性质相同, 所以不失一般性, 考虑式(5.49)中 $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = \infty$ 的情况。这时, 如果

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx$$

收敛。可以将其写为

$$\int_a^b f(x) dx$$

这已经在式(5.17)中叙述过了。

在本节中, 特别考虑积分

$$I = \int_a^b \frac{dx}{(b-x)^k} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} \frac{dx}{(b-x)^k} \quad (5.51)$$

($a < b$), 这里设

$$I_\epsilon = \int_a^{b-\epsilon} \frac{dx}{(b-x)^k} \quad (5.52)$$

$$\left. \begin{aligned} k=1 \text{ 时, } I_\epsilon &= -[\log(b-x)]_a^{b-\epsilon} = -\log\epsilon + \log(b-a) \\ k \neq 1 \text{ 时, } I_\epsilon &= -\left[\frac{(b-x)^{1-k}}{1-k}\right]_a^{b-\epsilon} = \frac{(b-a)^{1-k} - \epsilon^{1-k}}{1-k} \end{aligned} \right\} \quad (5.53)$$

因此,积分式(5.51)

$$I = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} I_\epsilon \quad (5.54)$$

要是 $k < 1$ 就收敛,要是 $k \geq 1$ 就发散。

若将以上的情况一般化,则在积分

$$I = \int_a^b \frac{f(x)}{(b-x)^k} dx \quad (5.55)$$

中,如果对于非常趋近于 b 的 x ,有使 $|f(x)| < M$ 的正数 M 存在,且 $k < 1$,则式(5.55)的 I 收敛。反之,如果对于非常趋近于 b 的 x ,有 $|f(x)| > m > 0$ 的 m 存在,同时 $k \geq 1$,则式(5.55)的 I 发散。

对于无限的积分,也可以说与上面类似。

[问 5.3] 说明无限积分 $\int_1^\infty \frac{dx}{x^k}$ 当 $k > 1$ 时收敛,并具有有限确定值,当 $k \leq 1$ 时发散。

[问 5.4] 关于无限积分 $\int_a^\infty \frac{f(x)}{x^k} dx (a > 0)$ 说明下面情况。

(a) 对于趋向于无穷大的 x ,有 $|f(x)| < M$ 的有限值 M 存在,且 $k > 1$ 时,积分收敛。

(b) 对于趋向于无穷大的 x ,有 $|f(x)| > m > 0$ 的 m 存在,且 $k \leq 1$ 时,积分发散。

[提示] 在取充分大的 l 与任意小的正数 ϵ 对于 (a) 的情况,说明 $\left| \int_l^\infty \frac{f(x)}{x^k} dx \right| < \epsilon$, 对于 (b) 的情况可以证明

$$\left| \int_l^\infty \frac{f(x)}{x^k} dx \right| \rightarrow \infty$$

5.6 Γ 函数与 B 函数

A. Γ 函数

定积分

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx \quad (n > 0) \quad (5.56)$$

称为 Γ (伽玛) 函数(gamma function)。特别是 $n = 1$ 时

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-x} dx = [-e^{-x}]_0^{\infty} = 1 \quad (5.57)$$

根据分部积分

$$\begin{aligned} \Gamma(n+1) &= \int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx = [-x^n e^{-x}]_0^{\infty} + n \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx \\ &= n \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx = n\Gamma(n) \end{aligned}$$

$$\text{所以} \quad \Gamma(n+1) = n\Gamma(n) \quad (5.58)$$

因此,若设 $n = 1$, 则 $\Gamma(2) = 1 \times \Gamma(1) = 1$

若设 $n = 2$, 则 $\Gamma(3) = 2 \times \Gamma(2) = 2!$

若设 $n = 3$, 则 $\Gamma(4) = 3 \times \Gamma(3) = 3 \times 2! = 3!$

以下同样,对于正整数 n , $\Gamma(n+1) = n!$ (5.59)

如果已知 $\Gamma(n)$ 对于相邻的整数(例如 1 和 2)之间的 n , 则可以求得对于 0 和 1 之间或 2 和 3 之间的 n 的 Γ 函数。例如,在式(5.58)中设 n 为 1 和 2 之间的值 $n = 1.5$, 这时式(5.58)为

$$\Gamma(1.5+1) = 1.5 \times \Gamma(1.5)$$

$$\text{所以} \quad \Gamma(2.5) = 1.5 \times \Gamma(1.5) \quad (5.60)$$

因此,如果理解了 $\Gamma(1.5)$, 从式(5.60)也就容易理解 $\Gamma(2.5)$ 。在式(5.58)中,若设 $n = 0.5$

$$\text{则} \quad \Gamma(0.5+1) = 0.5\Gamma(0.5)$$

$$\text{所以} \quad \Gamma(0.5) = 2\Gamma(1.5) \quad (5.61)$$

故知道了 $\Gamma(1.5)$ 也就知道了 $\Gamma(0.5)$ 。且在式(5.58)中,若设 $n = -0.5$

$$\text{则} \quad \Gamma(0.5) = (-0.5) \times \Gamma(-0.5)$$

$$\text{所以} \quad \Gamma(-0.5) = -2\Gamma(0.5) \quad (5.62)$$

故对于负的 n 也可以求得 $\Gamma(n)$ 。由于 $\Gamma(n)$ 是被扩展的阶乘函数 $n!$, 所以 n 为正整数时 $\Gamma(n)$ 与 $(n-1)!$ 一致。通常,根据式(5.58),对于正整数 k 取

$$\Gamma(n+k) = (n+k-1) \cdot \cdots \cdot (n-1)n\Gamma(n)$$

所以
$$\Gamma(n) = \frac{\Gamma(n+k)}{n(n+1) \cdot \cdots \cdot (n+k-1)} \quad (5.63)$$

由于 k 充分大时 $n+k > 0$, 所以, $\Gamma(n)$ 对于 $n = 0, -1, -3, \cdots$ 为无限大. $\Gamma(n)$ 或 $\Gamma(n+1)$ 的图形如图 5.10 所示.

[例 5.5] 在 Γ 函数的定义式(5.56)中, 根据 $x = y^2$ 将积分函数 x 变换为 y .

[解] 设 $y > 0$. 以 $y = \sqrt{x}$ 得 $x = 0$ 时 $y = 0, x = \infty$ 时 $y = \infty$, 又因为 $dx = 2ydy$, 所以

$$\begin{aligned} \Gamma(n) &= \int_0^\infty y^{2n-2} e^{-y^2} \cdot 2ydy \\ &= 2 \int_0^\infty y^{2n-1} e^{-y^2} dy \quad (5.64) \end{aligned}$$

[问 5.5] 在 Γ 函数的定义式(5.56)中, 根据下面的式子, 将积分变量变换为 y

(a) $x = ay$ (b) $x = -(m+1)\log y$

B. β 函数

$m > 0, n > 0$ 时, 定积分

$$\beta(m, n) = \int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1} dx \quad (5.65)$$

称为 β (倍他)函数(beta function)

[问 5.6] 证明下式(5.66)

$$\beta(m, n) = \beta(n, m) \quad (5.66)$$

[提示] 作积分变量变换 $x = 1 - y$

下面从 β 函数式(5.65)导出别的形式. 在式(5.65)中, 若将变量变换为 $x = \sin^2 \varphi$, 则 $x = 0$ 时 $\varphi = 0, x = 1$ 时 $\varphi = \pi/2$

$$dx = 2\sin\varphi\cos\varphi d\varphi$$

所以
$$\begin{aligned} \beta(m, n) &= \int_0^{\pi/2} \sin^{2m-2}\varphi (1 - \sin^2\varphi)^{n-1} \cdot 2\sin\varphi\cos\varphi d\varphi \\ &= \int_0^{\pi/2} \sin^{2m-2}\varphi \cos^{2n-2}\varphi \cdot 2\sin\varphi\cos\varphi d\varphi \end{aligned}$$

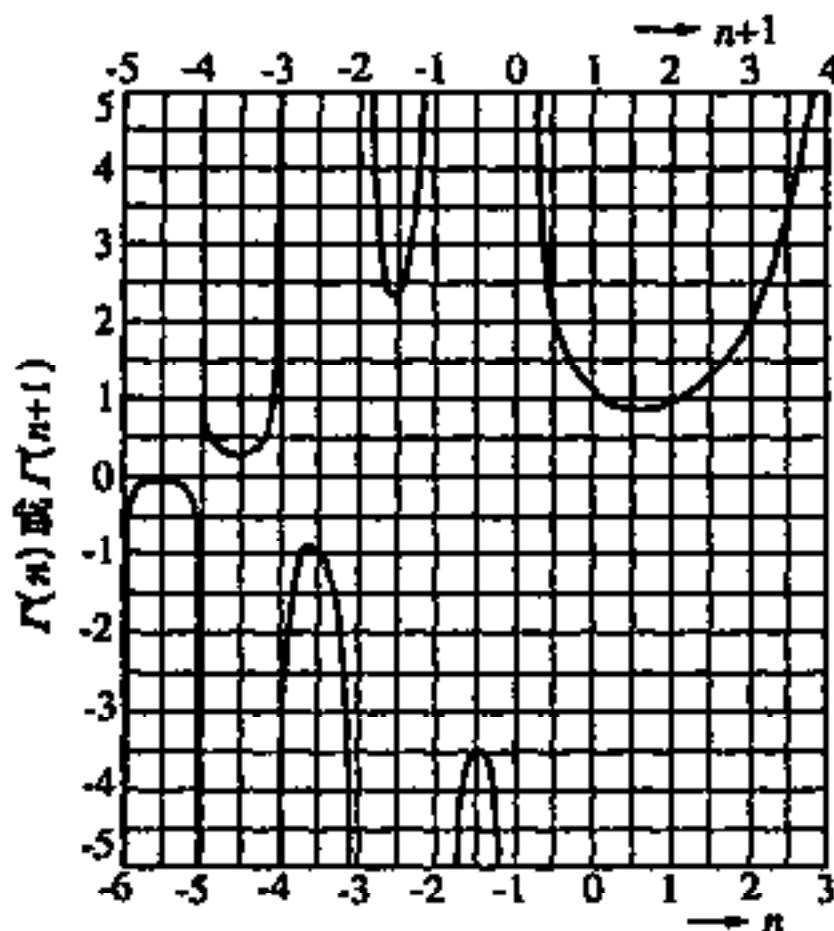


图 5.10 Γ 函数的图像

$$= 2 \int_0^{\pi/2} \sin^{2m-1} \varphi \cos^{2n-1} \varphi d\varphi \quad (5.67)$$

[问 5.7] 在式(5.65)中,根据下面各式将函数 x 变换为 y

(a) $x = y/a$ (b) $x = y/(1+x)$

下面求 Γ 函数与 β 函数的关系。由式(5.64)得:

$$\begin{aligned} \Gamma(m)\Gamma(n) &= 4 \int_0^\infty y^{2m-1} e^{-y^2} dy \int_0^\infty x^{2n-1} e^{-x^2} dx \\ &= 4 \int_0^\infty \int_0^\infty y^{2m-1} x^{2n-1} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \end{aligned} \quad (5.68)$$

这里将直角坐标变换为极坐标 (r, θ)

设 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, dx dy \rightarrow r dr d\theta$ 则式(5.68)为下式

$$\begin{aligned} \Gamma(m)\Gamma(n) &= 4 \int_0^{\pi/2} \int_0^\infty r^{2(m+n)-1} e^{-r^2} \sin^{2m-1} \theta \cos^{2n-1} \theta r dr d\theta \\ &= 4 \int_0^{\pi/2} \sin^{2m-1} \theta \cos^{2n-1} \theta d\theta \int_0^\infty r^{2(m+n)-1} e^{-r^2} dr \end{aligned} \quad (5.69)$$

可是,根据式(5.67)

$$2 \int_0^{\pi/2} \sin^{2m-1} \theta \cos^{2n-1} \theta d\theta = \beta(m, n) \quad (5.70)$$

根据式(5.64)

$$2 \int_0^\infty r^{2(m+n)-1} e^{-r^2} dr = \Gamma(m+n) \quad (5.71)$$

故将式(5.70), (5.71) 代入式(5.69) 得

$$\Gamma(m)\Gamma(n) = \beta(m, n)\Gamma(m+n)$$

所以

$$\beta(m, n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} \quad (5.72)$$

5.7 二、三个重要的定积分

[例 5.6] 求 $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$

[解] 设 $I = \int_0^c e^{-x^2} dx = \int_0^c e^{-y^2} dy$ (5.73)

则

$$I^2 = \int_0^c e^{-x^2} dx \int_0^c e^{-y^2} dy$$

$$= \int_0^c \int_0^c e^{-(x^2+y^2)} dx dy$$

参照图 5.11, 将上式的右边变换为极坐标, 则

$$\int_0^{\pi/2} \int_0^c e^{-r^2} r dr d\theta < I^2 < \int_0^{\pi/2} \int_0^{\sqrt{2}c} e^{-r^2} r dr d\theta \quad (5.74)$$

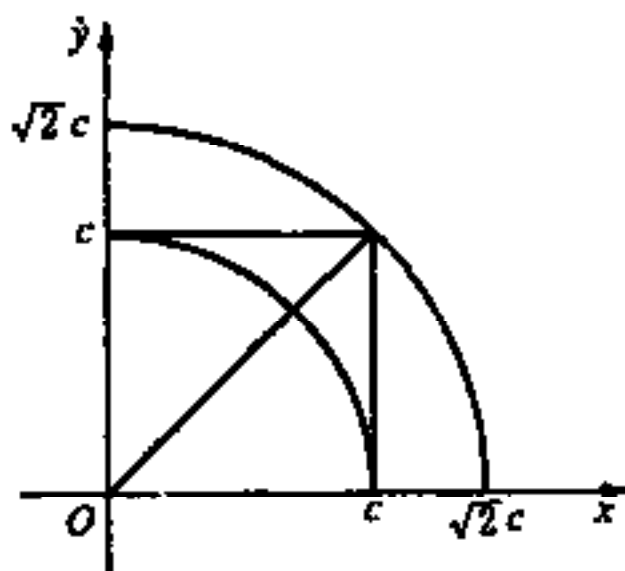


图 5.11 $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$ 的计算

若设 $R = r^2$, 则 $dR = 2r dr$. 因此, $r dr = d\left(\frac{R}{2}\right)$

$$\int e^{-r^2} r dr = \int e^{-R} \frac{dR}{2} = -\frac{e^{-R}}{2} = -\frac{e^{-r^2}}{2}$$

所以

$$\left. \begin{aligned} \int_0^c e^{-r^2} r dr &= -\frac{[e^{-r^2}]_0^c}{2} = \frac{1}{2}(1 - e^{-c^2}) \\ \int_0^{\sqrt{2}c} e^{-r^2} r dr &= \frac{1}{2}(1 - e^{-2c^2}) \\ \int_0^{\pi/2} d\theta &= \frac{\pi}{2} \end{aligned} \right\} \quad (5.75)$$

将式(5.75)代入式(5.74)得

$$\frac{\pi}{4}(1 - e^{-c^2}) < I^2 < \frac{\pi}{4}(1 - e^{-2c^2})$$

式中, 设 $c \rightarrow \infty$

$$\lim_{c \rightarrow \infty} I^2 = \frac{\pi}{4}$$

所以

$$\lim_{c \rightarrow \infty} I = \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad (5.76)$$

$$[\text{问 5.8}] \quad \text{求证} \int_0^\infty e^{-a^2 x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a} \quad (5.77)$$

$$[\text{问 5.9}] \quad \text{用式(5.64)及式(5.76)证明: } \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \quad (5.78)$$

$$[\text{例 5.7}] \quad \text{求 } I(\xi) = \int_0^\infty \frac{e^{-\xi x} \sin x}{x} dx \quad (\xi > 0)$$

【解】 这个积分是式(5.45)的形式。在这种情况下,式(5.45)为

$$f(x, \xi) = \frac{e^{-\xi x} \sin x}{x}, \quad f_{\xi}(x, \xi) = -e^{-\xi x} \sin x$$

在 $0 < x < \infty, \xi > 0$ 时 f, f_{ξ} 连续, 记

$$\frac{e^{-\xi x} \sin x}{x} = \frac{x e^{-\xi x} \sin x}{x^2}$$

若注意 $\lim_{x \rightarrow \infty} x e^{-\xi x} = 0$ 的情况^①, 对于充分大的 x , 由于 $x e^{-\xi x} < 1$, 所以

$$\left| \frac{e^{-\xi x} \sin x}{x} \right| < \frac{1}{x^2}$$

因此, 对于任意小的正数 ϵ , 规定与 ξ 无关的 l_0 为 $l > l_0$ 时

$$\left| \int_l^{\infty} \frac{e^{-\xi x} \sin x}{x} dx \right| < \epsilon$$

由此可知

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-\xi x} \sin x}{x} dx$$

对于 $\xi > 0$ 一致收敛。

同样, 对于充分大的 x , 因为

$$|e^{-\xi x} \sin x| = \left| \frac{x^2 e^{-\xi x} \sin x}{x^2} \right| < \frac{1}{x^2} \text{ ②}$$

所以, 对于任意小的正数 ϵ , 规定与 ξ 无关的 $l, l > l_1$ 时, 使

$$\left| \int_l^{\infty} e^{-\xi x} \sin x dx \right| < \epsilon$$

由此可知, 对于 $\xi > 0$

$$\int_0^{\infty} e^{-\xi x} \sin x dx$$

一致收敛, 从式(5.48)得

① $\lim_{x \rightarrow \infty} x e^{-\xi x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^{\xi x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\xi e^{\xi x}} = 0$ 其中 $\frac{x}{e^{\xi x}}$ 为当 $x \rightarrow \infty$ 时的 $\frac{\infty}{\infty}$ 不定型, 对分子分母分别求导再令 $x \rightarrow \infty$ 而得(罗必塔(L'Hospital)定理)。

② $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 e^{-\xi x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^{\xi x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{\xi e^{\xi x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{\xi^2 e^{\xi x}} = 0$ 这里用了二次罗必塔定理。

$$I'(\xi) = - \int_0^{\infty} e^{-\xi x} \sin x dx = - \frac{1}{1 + \xi^2} \quad (1)$$

若对两边积分

$$I(\xi) = - \arctan \xi + C \quad (C = \text{积分常数}) \quad (a)$$

在本例题的最初的式子中, 对于 $0 < x < \infty$ 采用 $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-\xi x} = 0$ 的情况, 则

$$I(\infty) = 0 \quad (b)$$

从式(a)得

$$I(\infty) = - \arctan \infty + C = - \frac{\pi}{2} + C \quad (c)$$

$$\text{从式(b), (c) 得 } C = \frac{\pi}{2} \quad (d)$$

将式(d)代入式(a), 得

$$I(\xi) = \frac{\pi}{2} - \arctan \xi = \operatorname{arccot} \xi = \arctan \frac{1}{\xi} \quad (2)$$

故

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-\xi x} \sin x}{x} dx = \operatorname{Arctan} \frac{1}{\xi} \quad (5.79)$$

所以

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2} \quad (5.80)$$

习 题 5

5.1 求下面的定积分

① 関谷, 大岩, 藤沢: 工業技術者のための応用数学概要, いずみ書房(1962)p. 167。

② 图 5.12 中 $\tan \alpha = \xi$, $\cot \beta = \xi$, $\tan \beta = 1/\xi$, 从而 $\alpha = \arctan \xi$

$$\beta = \operatorname{arccot} \xi = \arctan(1/\xi) \quad \alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{所以 } \frac{\pi}{2} - \alpha = \beta, \quad \frac{\pi}{2} - \arctan \xi = \operatorname{arccot} \xi = \arctan(1/\xi)$$

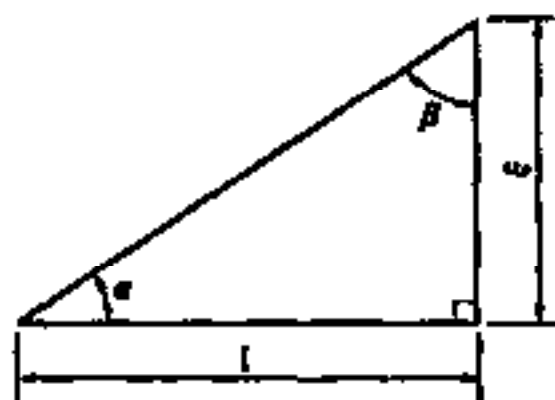


图 5.12 $\frac{\pi}{2} - \arctan \xi = \operatorname{arccot} \xi$
 $= \arctan(1/\xi)$ 的说明

(a) $\int_0^3 3x^2 dx$

(b) $\int_4^{25} \frac{dx}{\sqrt{x}}$

(c) $\int_1^3 \left(3x - \frac{2}{x}\right)^2 dx$

(d) $\int_0^{\pi/2} (\sec^2 x - \sin x) dx$

(e) $\int_{1/\sqrt{2}}^{\sqrt{3}/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

(f) $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$

(g) $\int_0^1 \frac{2x}{x^2+3} dx$

(h) $\int_0^\infty e^{-x} dx$

(i) $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx$

(j) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

(k) $\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1+x^2}$

(l) $\int_{\pi/2}^{\pi/3} \operatorname{cosec} x dx$

5.2 求证以 $\int_0^{\pi/2} \sin^n \theta d\theta = \int_0^{\pi/2} \cos^n \theta d\theta$

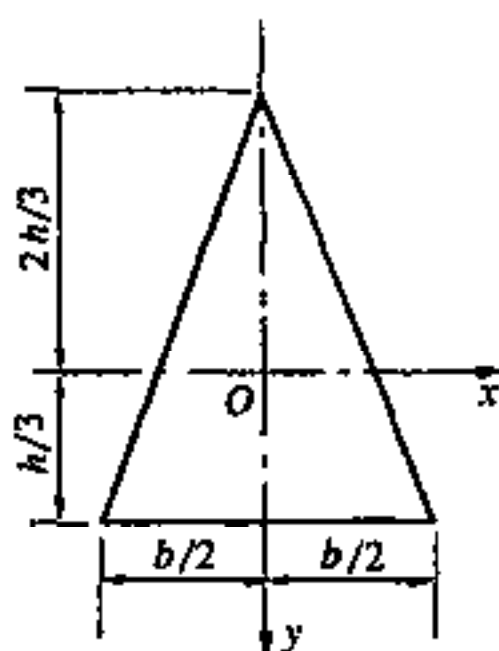
5.3 求图 5.13 所示的等腰三角形截面折梁的绕 x 轴转动的惯性矩。

图 5.13

5.4 设正弦波状的电压或电流可用以时间 t 为函数的正弦曲线表示为

$$f(t) = a \sin(\omega t + \varphi)$$

式中 a, ω, φ ——常数； a ——最大值(maximum value)； ω ——变化速度或角频率(circular frequency)； φ ——位相(phase)。求 $f(t)$ 的平均值(mean value 或 average value) $M = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\pi/\omega} |f(t)| dt$ 及有效值(effective value 或 root mean square value) $E =$ $\sqrt{\frac{\omega}{\pi} \int_0^{\pi/\omega} \{f(t)\}^2 dt}$ 式中的 $\frac{\pi}{\omega}$ 是 $f(t)$ 的半周期(也请确认这种情况)。5.5 有一平面曲线形的钢丝,设平面内的坐标 x, y , 钢丝的曲线的方程式为 $x = x(s), y = y(s)$ 。这里参变量 s 是钢丝的弧长。该钢丝在 $a \leq x \leq b$ 部分的关于 x 轴的惯性矩(moments of inertia)为

$$I = \int_a^b \rho \{y(s)\}^2 ds$$

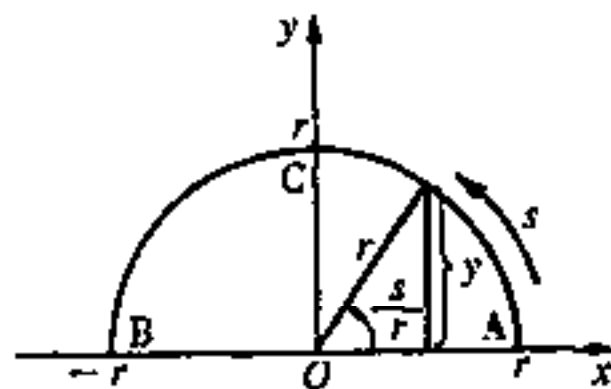
式中的 ρ 是钢丝的线密度(每单位长度的质量, linear density)。求图 5.14 所示的半径为 r 的半圆形钢丝 ABC 的 x 轴(直径)转动的惯性矩。

图 5.14

5.6 证明下式成立

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^{1/4}}} = \frac{128}{35}$$

[提示] 设 $y = x^{1/4}$, 用 β 函数表示给出的积分, 用 Γ 函数表示式(5.72)并将其代入 β , 使用式(5.58), 式(5.78)。

第 6 章 线积分、面积分、场的关系式

6.1 数量场、矢量场、张量场

浇注金属溶液(在高温下被熔化的金属)的铸型在接触金属溶液的内部附近是高温,在与空气接触的外部是低温,并具有某个温度分布。对于在空间的这个铸型所占的范围,温度 T 是铸型内各点坐标 (x, y, z) 的函数 $T(x, y, z)$ 。像这样的如温度 T 那样的数量,就空间范围的各点被定义时,该范围与其各点的数量函数(上例中的温度 $T(x, y, z)$)合在一起的概念称为数量场(scalar field),上例的情况,数量均用 T 表示。

另外,铸型由于被注入高温的金属溶液而温度上升,受热膨胀和金属溶液的内压将产生一定的变形。由于这个原因,铸型通常在每个不同点处产生不同的位移,这个位移是矢量,若将它用 U 表示,那么, U 是点坐标 (x, y, z) 的函数 $U(x, y, z)$, 这样的情况把矢量 U 被定义的范围和矢量函数 $U(x, y, z)$ 合在一起的概念称为矢量场(vector field),用 U 表示矢量场。

在发生热变形的铸型内部产生应力作用。若应力过大,就像在玻璃杯中急剧加入热开水后杯子破碎那样,铸型被破坏。这样的应力就是在 3.2 叙述过的张量。若用 σ 表示张量,则 σ 也是铸型范围内点的坐标 (x, y, z) 的函数 $\sigma(x, y, z)$ 这样的情况,将张量 σ 被定义的范围和张量函数 $\sigma(x, y, z)$ 合在一起的概念称为张量场(tensor field),用 σ 表示张量场。

数量为温度时,数量场称为温度场(temperature field),矢量为位移时,矢量场称为位移场(displacement field),张量为应力时,张量场称为应力场(stress field)。这样的具体说法在解决实际问题时也可以使用。

虽然以上仅取铸型为例,但是对于其他的情况也是一样的

6.2 线积分

A. 沿平面曲线的线积分

设在 x, y 平面内的某个范围 R 可以给出 x, y 的函数 $f(x, y)$ 。如图 6.1 所示,考虑光滑连接该范围内 2 点 $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$ 的曲线 C 。设曲线 C 的方程式采用 $y = \varphi(x)$ 或 $x = \psi(y)$ 或参变量 t

$$x = x(t), \quad y = y(t) \quad (6.1)$$

时积分

$$I_1 = \int_{a_1}^{b_1} f(x, \varphi(x)) dx \quad (6.2)$$

称为沿曲线 C 的 $f(x, y)$ 从 A 到 B 的关于 x 的线积分(line integral), 可以写为:

$$I_1 = \int_{(a_1, a_2)}^{(b_1, b_2)} f(x, y) dx \quad (6.3)$$

$$I_1 = \int_C f(x, y) dx = \int_C f dx \quad (6.4)$$

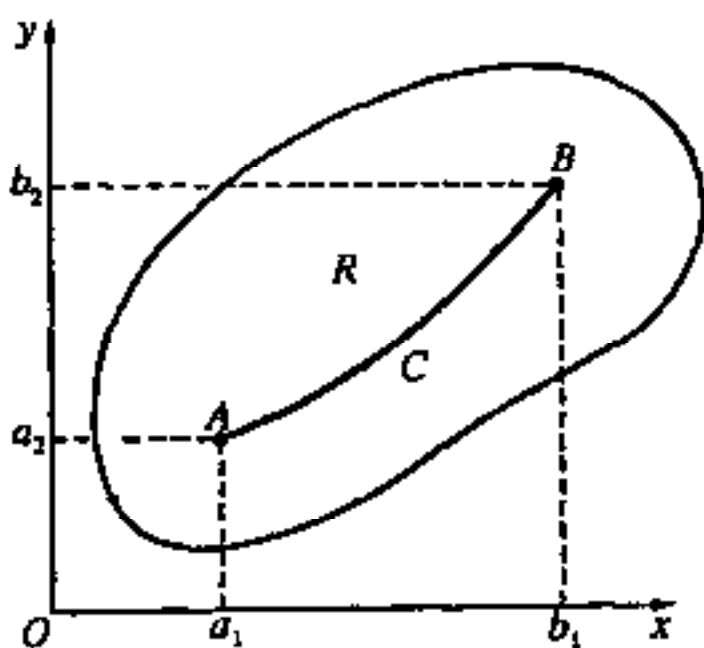


图 6.1 线积分的路径和其平面曲线

$$I_1 = \int_A^B f(x, y) dx = \int_A^B f dx \quad (6.5)$$

$$I_1 = \int_{AB} f(x, y) dx = \int_{AB} f dx \quad (6.6)$$

$$I_1 = \int_A^B f(x(t), y(t)) dx(t) = \int_A^B f(x(t), y(t)) x'(t) dt \quad (6.7)$$

对于 y 的线积分

$$I_2 = \int_{a_2}^{b_2} f(\psi(y), y) dy \quad (6.8)$$

也是完全同样, 只需在式(6.3) ~ 式(6.7)中, 将 dx 换写为 dy , 将 $x'(t)$ 换写为 $y'(t)$ 即可。

另外, 在采用参变量 t 的曲线 C 的方程(6.1)中, 设给出的点 A 的坐标 t 为 t_a , 给出的点 B 的坐标 t 为 t_b 时积分

$$I_3 = \int_{t_a}^{t_b} f(x(t), y(t)) dt \quad (6.9)$$

称为沿曲线 C 的 $f(x, y)$ 从点 A 到点 B 的关于 t 的积分。记为

$$I_3 = \int_A^B f dt = \int_{AB} f dt = \int_C f dt \quad (6.10)$$

作为参变量 t , 往往可以用从 C 上某个定点(例如 A) 沿着 C 测得的弧长 s 表示。

下面考虑平面的矢量函数

$$F(x, y) = f(x, y)i + g(x, y)j \quad (6.11)$$

沿着 C 的线积分。 i, j 是 x, y 方向的单位矢量。设曲线 C 上的点 (x, y) 的位置矢量为

$$r = xi + yj \quad (6.12)$$

位置矢量的微分如图 6.2 所示,并用

$$dr = dxi + dyj \quad (6.13)$$

给出. 这种情况的线积分

$$I_1 = \int_A^B F(x, y) dr \quad (6.14)$$

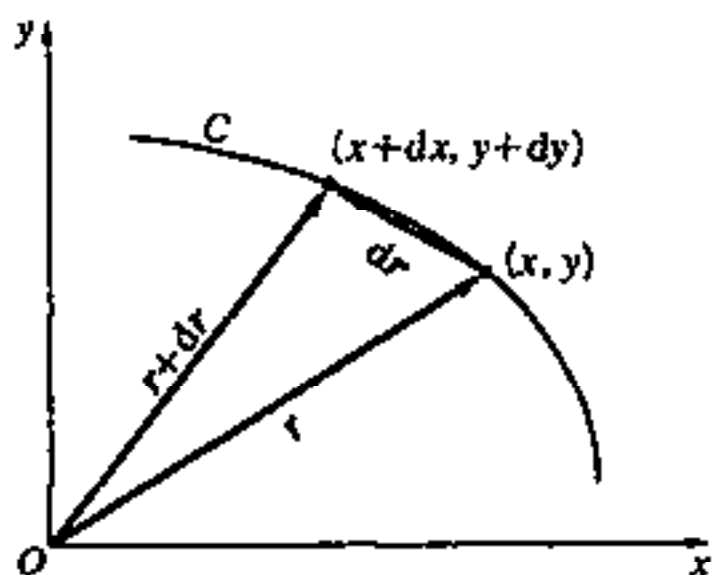


图 6.2 平面曲线上的位置矢量和其微分 dr

其具体的意义:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_A^B (f(x, y)i + g(x, y)j)(dxi + dyj) \\ &= \int_A^B \{f(x, y)dx + g(x, y)dy\} \end{aligned} \quad (6.15)$$

式中, i, j 是 x, y 方向的单位矢量。

式(6.15)右边的 $\int_A^B f(x, y)dx, \int_A^B g(x, y)dy$ 的意义是与式(6.2)~式(6.8)叙述的情况完全相同的。特别在式(6.15)中,若代入采用参变量的曲线 C 的方程式(6.1),则

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{t_a}^{t_b} \{f(x(t), y(t))dx(t) + g(x(t), y(t))dy(t)\} \\ &= \int_{t_a}^{t_b} \{f(x(t), y(t))x'(t) + g(x(t), y(t))y'(t)\} dt \end{aligned} \quad (6.16)$$

将这些简记为

$$I_1 = \int_C (f dx + g dy) = \int_A^B (f dx + g dy) = \int_{AB} (f dx + g dy) \quad (6.17)$$

[例 6.1] 曲线 C 为抛物线 $y^2 = x$ 时, 计算沿 C 的下面的线积分

$$I_5 = \int_{(0,0)}^{(1,1)} \{y dx + (x + 2y) dy\}$$

[解] 由于从 $y^2 = x$ 得 $dx = 2y dy$, 所以, 若将所有变量变换为 y 后计算, 则

$$\begin{aligned} I_5 &= \int_0^1 \{y \cdot 2y dy + (y^2 + 2y) dy\} = \int_0^1 (2y^2 + y^2 + 2y) dy \\ &= \int_0^1 (3y^2 + 2y) dy = [y^3 + y^2]_0^1 = 2 \end{aligned}$$

[问 6.1] 沿(a) 直线(b) 原点为中心的圆, 求线积分

$$\int_{(3,0)}^{(0,3)} \{ (x^2 - y^2) dx + x dy \}$$

[提示] (b) 的情况, 采用隐函数的圆的方程可以用

$$x = 3\cos t, \quad y = 3\sin t$$

给出, 在点(3,0)处, $t = 0$, 在(0,3)处, $t = \pi/2$ 。

B. 沿空间曲线的线积分

在空间的某个范围内设可以给出 x, y, z 的函数 $f(x, y, z)$ 。考虑光滑连接该范围内 2 点 $A(a_1, a_2, a_3), B(b_1, b_2, b_3)$ 的曲线 C 。曲线 C 的方程式用

$$y = \varphi(x) \quad z = \psi(x) \quad (6.18)$$

给出或采用参变量 t 由 $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$ (6.19)

给出时, 从函数 $f(x, y, z)$ 的点 A 到点 B 的关于 x 的线积分可以考虑为

$$I_6 = \int_A^B f(x, y(x), z(x)) dx \quad (6.20)$$

或考虑为对于参变量 t 的线积分

$$I_7 = \int_A^B f(x(t), y(t), z(t)) dt \quad (6.21)$$

它们与前项的沿平面曲线的线积分一样, 可以写为

$$I_6 = \int_A^B f dx = \int_C f dx = \int_{AB} f dx \quad (6.22)$$

$$I_7 = \int_A^B f dt = \int_C f dt = \int_{AB} f dt \quad (6.23)$$

另外, 对于

$$I_8 = \int_A^B f dy = \int_C f dy = \int_{AB} f dy \quad (6.24)$$

$$I_9 = \int_A^B f dz = \int_C f dz = \int_{AB} f dz \quad (6.25)$$

也是一样。

下面就空间的矢量函数 $F(x, y, z)$ 沿空间曲线 \widehat{AB} (或 C) 进行积分

$$I_{10} \equiv \int_A^B F(x, y, z) dr \quad (6.26)$$

$$\mathbf{F}(x, y, z) = f(x, y, z)\mathbf{i} + g(x, y, z)\mathbf{j} + h(x, y, z)\mathbf{k} \quad (6.27)$$

如图 6.3 所示, 若将位置矢量

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \quad (6.28)$$

的微分表示为

$$d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k} \quad (6.29)$$

并将式(6.27), 式(6.29)代入式(6.26) 令对于点 A, B 的参变量 t 的值分别为 t_a, t_b , 则可得

$$\begin{aligned} I_{10} &= \int_{t_a}^{t_b} \{ f(x(t), y(t), z(t))dx(t) \\ &\quad + g(x(t), y(t), z(t))dy(t) \\ &\quad + h(x(t), y(t), z(t))dz(t) \} \\ &= \int_{t_a}^{t_b} \{ f(x(t), y(t), z(t))x'(t) + g(x(t), y(t), z(t))y'(t) \\ &\quad + h(x(t), y(t), z(t))z'(t) \} dt \end{aligned} \quad (6.30)$$

有时也将其简写为

$$I_{10} = \int_C (f dx + g dy + h dz) \quad (6.31)$$

式中的 \int_C 也可以用 \int_A^B, \int_{AB} 等代替。

〔问 6.2〕 质点沿曲线 \widehat{AB} 移动, 其间, 质点受到用式(6.27) 给出的力 $\mathbf{F}(x, y, z)$ 作用时, 求这个力对于移动质点所做的功。

6.3 面积分

在矢量场 \mathbf{F} 的曲面 S 上的面积分(surface integral), 是将曲面 S 分割为很多的微小元素 $\Delta S_1, \Delta S_2, \dots, \Delta S_m$, 在这些元素内任意取点 $P_1, P_2, \dots, P_m, m \rightarrow \infty$; 可以用各元素 ΔS_i 趋于无限小时的下式给出极限值

$$I_m = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \mathbf{F}(P_i) \cdot \mathbf{n}(P_i) \Delta S_i \quad (6.32)$$

式中

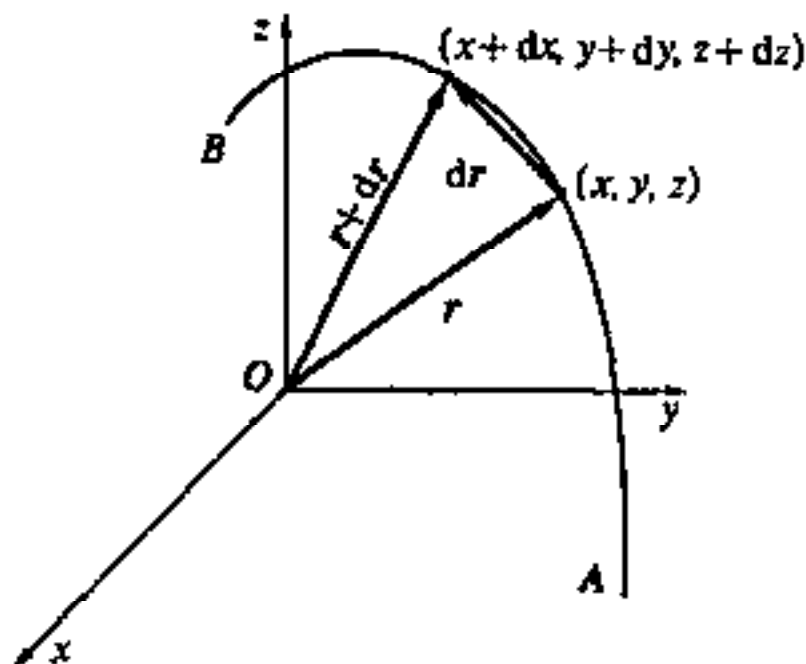


图 6.3 空间曲线上的点的位置矢量和其微分 $d\mathbf{r}$

$F(P_i)$ = 在点 P_i 的矢量 F

$n(P_i)$ = 在点 P_i 的曲面的单位法线矢量

ΔS_i = 元素 ΔS_i 的面积

这时的面积分的式(6.32)可以写为

$$I_n = \int_S F n dS \quad (6.33)$$

式中,若设

$$F \equiv f i + g j + h k \quad (6.34)$$

$$n \equiv \cos(xn)i + \cos(yn)j + \cos(zn)k \quad (6.35)$$

则式(6.33)为

$$\begin{aligned} I_n &= \int_S (f i + g j + h k) \cdot (\cos(xn)i + \cos(yn)j + \cos(zn)k) dS \\ &= \int_S \{f \cos(xn) + g \cos(yn) + h \cos(zn)\} dS \end{aligned} \quad (6.36)$$

6.4 数量场的梯度变化率

数量场 f 的斜率或梯度(gradient),是用下式定义的函数

$$\text{grad} f \equiv \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} i + \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y} j + \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z} k \quad (6.37)$$

又因为矢量微分算子 ∇

$$\nabla f \equiv \frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k \quad (6.38)$$

读作那勃拉(nabla),所以,由式(6.37),式(6.38)知

$$\text{grad} f = \nabla f \quad (6.39)$$

与二元函数 $f(x, y)$ 的全微分(式(4.26))完全一样,三元函数 $f(x, y, z)$ 的全微分可以用下式给出:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz \quad (6.40)$$

上式也可写成

$$df = \text{grad} f \cdot dr = \nabla f \cdot dr \quad (6.41)$$

与二元函数 $f(x, y)$ 的情况一样, 三元函数 $f(x, y, z)$ 的 s 方向的方向导数与式 (4.17) 一样可以用

$$\begin{aligned}\frac{df}{ds} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{ds} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x} \cos(xs) + \frac{\partial f}{\partial y} \cos(ys) + \frac{\partial f}{\partial z} \cos(zs)\end{aligned}\quad (6.42)$$

给出。这里设 s 方向的单位矢量为 s 时,

$$s = \cos(x, s)i + \cos(y, s)j + \cos(z, s)k \quad (6.43)$$

式中, $(x, s), (y, s), (z, s)$ 为 s 方向与 x, y, z 方向之间的夹角。因此, s 方向的方向导数为

$$\frac{df}{ds} = \text{grad} f \cdot s = \nabla f \cdot s \quad (6.44)$$

函数 $f(x, y, z)$ 取为一定值 C 的曲面

$$f(x, y, z) = C \quad (6.45)$$

称为等位面(level surface)。

因为位于等位面上点 (x, y, z) 附近的也在等位面上的点, $(x + dx, y + dy, z + dz)$ 也在等位面上, 能满足式 (6.45), 所以

$$f(x + dx, y + dy, z + dz) = C \quad (6.46)$$

对式左边用泰勒公式展开后, dx, dy, dz 为充分小, 故略去 dx, dy, dz 的二次以上项后得

$$f(x, y, z) + \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = C \quad (6.47)$$

式 (6.47) 减去式 (6.45), 得

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = 0 \quad (6.48)$$

该式用矢量表示:

$$dr = dx i + dy j + dz k \quad (6.49)$$

与矢量

$$\text{grad} f = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} i + \frac{\partial f}{\partial y} j + \frac{\partial f}{\partial z} k \quad (6.50)$$

正交的情况(参照式(2.25)).换句话说,式(6.49)的 dr 是沿从与等位面的点 (x, y, z) 同一等位面上充分接近的点 $(x+dx, y+dy, z+dz)$, 用矢量所引出的等位面(等位面的切线所构成的切平面内), 如上面所记的 ∇f , 由于正交, ∇f 是等位面的法线方向的矢量. f 的法线方向的方向导数, 当设法线单位矢量为 n , 并在式(6.44)中用 n 代替 s 后为

$$\frac{df}{dn} = \nabla f \cdot n = |\nabla f| = \frac{\partial f}{\partial x} \cos(x, n) + \frac{\partial f}{\partial y} \cos(y, n) + \frac{\partial f}{\partial z} \cos(z, n) \quad (6.51)$$

式中 $(x, n), (y, n), (z, n)$ 为等位面的法线方向与 x, y, z 方向的夹角。

式(6.51)的大小作为法线方向的矢量的大小可以用式(6.51)两边成 n 的方向给出:

$$\frac{df}{dn} n = |\nabla f| n = \nabla f \quad (6.52)$$

如前面所述, 其中 n 是 ∇f 方向的单位法线矢量。

[例 6.2] 当 $r = xi + yj + zk, r \equiv |r|$ 时, 求下面的量。

(a) ∇r (b) $\nabla(1/r)$

[解] $r^2 = |r|^2 = r \cdot r = x^2 + y^2 + z^2$

因
$$2r \frac{\partial r}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}$$

同样
$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}$$

$$(a) \nabla r = \frac{\partial r}{\partial x} i + \frac{\partial r}{\partial y} j + \frac{\partial r}{\partial z} k = \frac{xi}{r} + \frac{yj}{r} + \frac{zk}{r} = \frac{r}{r}$$

$$(b) \nabla \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \right) i + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{r} \right) j + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \right) k$$

因为
$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \right) \frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{1}{r^2} \frac{x}{r} = -\frac{x}{r^3}$$

同样
$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{y}{r^3}, \quad \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{z}{r^3}$$

所以
$$\nabla \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{x}{r^3} i - \frac{y}{r^3} j - \frac{z}{r^3} k = -\frac{r}{r^3}$$

[问 6.3] 对于两个数量函数 $f(x, y, z), g(x, y, z)$, 证明下式

$$(a) \nabla(fg) = g \nabla f + f \nabla g \quad (b) \nabla \left(\frac{f}{g} \right) = \frac{g \nabla f - f \nabla g}{g^2}$$

6.5 矢量场的发散

对于矢量场

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{V} &\equiv u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k} \\ u &= u(x, y, z), \quad v = v(x, y, z), \quad w = w(x, y, z) \end{aligned} \right\} \quad (6.53)$$

根据它们可以作出下面的矢量场

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{V} &= \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k} \right) \cdot (u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k}) \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \end{aligned} \quad (6.54)$$

称为矢量场的散度(divergence), 用 $\text{div}\mathbf{V}$ 表示, 即

$$\text{div}\mathbf{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \quad (6.55)$$

下面考虑 $\text{div}\mathbf{V}$ 的物理意义。如考虑流体的流动和图 6.4 所示的微小面积 ΔS , 即考虑通过该面积的流体的流量(每单位时间通过 ΔS 的体积)。设通过 ΔS 的流体的速度矢量为 \mathbf{r} , 在图 6.4 的斜曲面筒状体的体积中, \mathbf{n} 作为 ΔS 的单位法线矢量, 要求的流量

$$\Delta Q = \mathbf{V} \cdot \Delta S \mathbf{n} = V_n \Delta S \quad (6.56)$$

给出, 式中, V_n 是 \mathbf{V} 在 ΔS 的法线方向的分量。

下面, 考虑流动中的流体如图 6.5 所示的微小正六面体元素。将该单元体的三条

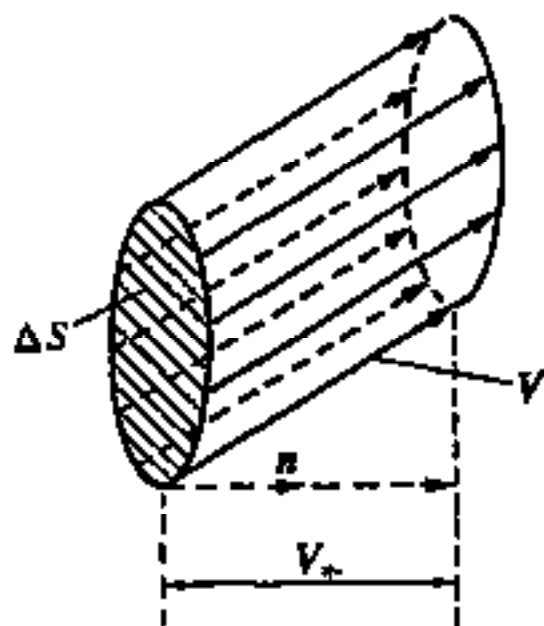


图 6.4 流过面积 ΔS 的流量

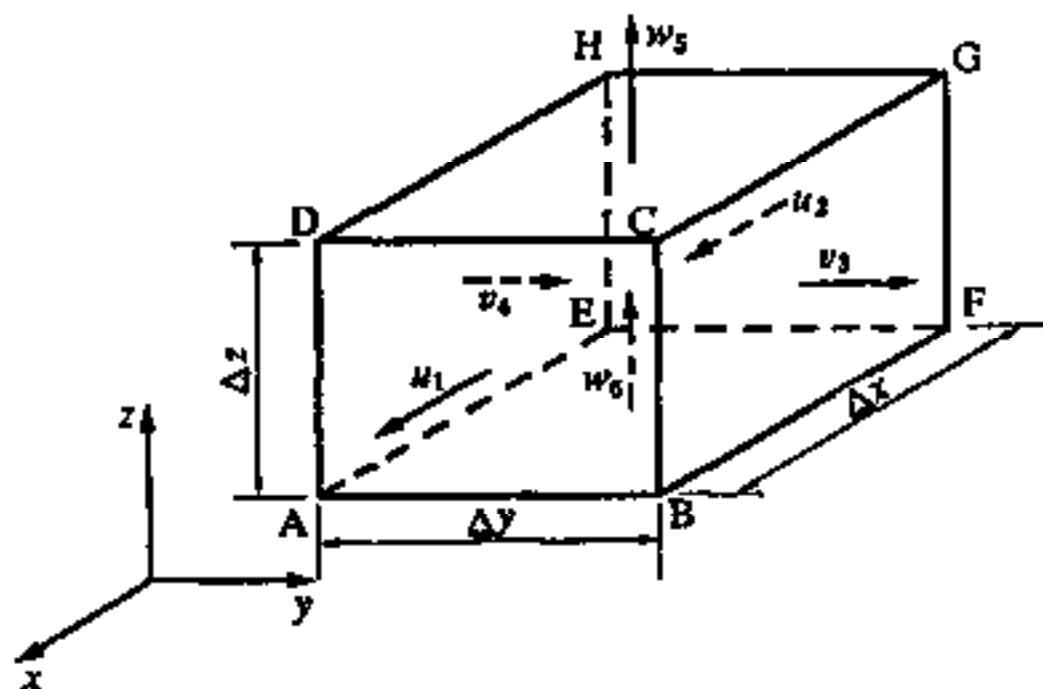


图 6.5 在微小正六面体单元流体的流出和流入

棱作为 x, y, z 的方向, 设它的大小为 $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ 。流体通过这个正六面体元素的六个面, 通过每个面的流量, 由式(6.56)为该面的面积与垂直于该面的速度分量之积, 所

以得到下面的表 6.1。

表 6.1 微小立方体的各面通过的流量
(速度在坐标轴的正方向为正, 流量从立方体流出外部为正)

面(面编号)	法线速度分量	面积	流量
ABCD(1)	u_1	$\Delta y \Delta z$	$u_1 \Delta y \Delta z$
EFGH(2)	u_2	$\Delta y \Delta z$	$-u_2 \Delta y \Delta z$
BFGC(3)	v_3	$\Delta z \Delta x$	$v_3 \Delta z \Delta x$
AEHD(4)	v_4	$\Delta z \Delta x$	$-v_4 \Delta z \Delta x$
DCGH(5)	w_5	$\Delta x \Delta y$	$w_5 \Delta x \Delta y$
ABFE(6)	w_6	$\Delta x \Delta y$	$-w_6 \Delta x \Delta y$

从微小正六面体的六个面流出六面体外部的总流量为表 6.1 中的最右面的流量栏的合计, 用下式给出:

$$\Delta Q = (u_1 - u_2) \Delta y \Delta z + (v_3 - v_4) \Delta z \Delta x + (w_5 - w_6) \Delta x \Delta y$$

上式两边除以微小立方体的体积 $\Delta x \Delta y \Delta z$, 求得每单位体积的流量为

$$\frac{\Delta Q}{\Delta x \Delta y \Delta z} = \frac{u_1 - u_2}{\Delta x} + \frac{v_3 - v_4}{\Delta y} + \frac{w_5 - w_6}{\Delta z} \quad (6.57)$$

在这个式子中, 若考虑正六面体的尺寸为其中的某点附近的趋于无限小的极限, 则

$$\left. \begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u_1 - u_2}{\Delta x} &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{v_3 - v_4}{\Delta y} &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{w_5 - w_6}{\Delta z} &= \frac{\partial w}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (6.58)$$

所以, 将式(6.58)代入式(6.57)得

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0 \\ \Delta z \rightarrow 0}} \frac{Q}{\Delta x \Delta y \Delta z} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \operatorname{div} V \quad (6.59)$$

式中, $\operatorname{div} V$ 是流过某点的每单位体积的流体净流出量。式中, 因为 $\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0, \Delta z \rightarrow 0$ 所以, 可以将前面的微小正六面体考虑为一点。

[例 6.3] 对于数量场 f 求 $\operatorname{div}(\operatorname{grad} f)$

[解] $\text{grad} f = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}i + \frac{\partial f}{\partial y}j + \frac{\partial f}{\partial z}k$

所以 $\text{div}(\text{grad} f) = \nabla \cdot \nabla f = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad (6.60)$$

通常将这个例题的 $\nabla \cdot \nabla f$ 写为 $\nabla^2 f$ 。因此

$$\nabla^2 f \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad (6.61)$$

式中 $\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (6.62)$

式(6.62)的右边称为拉普拉斯算子(Laplacian operator)也可以将 ∇^2 写为 Δ 。即

$$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (6.63)$$

Δ 称为拉普拉斯(Laplacian)。

[问 6.4] 对于数量场 f , 证明 $\text{div}[\text{grad}\{\text{div}(\text{grad} f)\}] = \nabla^2 \nabla^2 f = \Delta \Delta f$ 有时也将式中的 $\nabla^2 \nabla^2$ 写为 ∇^4 , 将 $\Delta \Delta$ 写为 Δ^2 , ∇^4, Δ^2 称为双调和算子(biharmonic operator)

6.6 矢量场的旋度

与前一节所取的同样的矢量场

$$\mathbf{V} = ui + vj + wk$$

用

$$\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)i + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)j + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)k \quad (6.64)$$

定义的矢量场称为 \mathbf{V} 的旋度(rotation)或旋转量(curl), 用 $\text{rot}\mathbf{V}$ 或 $\text{curl}\mathbf{V}$ 表示。即

$$\text{rot}\mathbf{V} = \text{curl}\mathbf{V} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{vmatrix} \quad (6.65)$$

[问 6.5] 将式(6.65)右边的行列式展开并验证其与式(6.64)一致。式(6.65)

是在式(2.34)的行列式中设

$$A = \nabla, \quad B = V$$

所以

$$\operatorname{rot} V = \operatorname{curl} V = \nabla \times V \quad (6.66)$$

[例 6.4] 当 $V = r^2 r, r = xi + yj + zk, r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ 时求 $\operatorname{rot} V$

[解] $\operatorname{rot} V$

$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ r^2 x & r^2 y & r^2 z \end{vmatrix} = \left\{ \frac{\partial}{\partial y}(r^2 z) - \frac{\partial}{\partial z}(r^2 y) \right\} i + \left\{ \frac{\partial}{\partial z}(r^2 x) - \frac{\partial}{\partial x}(r^2 z) \right\} j \\ + \left\{ \frac{\partial}{\partial x}(r^2 y) - \frac{\partial}{\partial y}(r^2 x) \right\} k$$

$$= (2yz - 2zy)i + (2zx - 2xz)j + (2xy - 2yx)k = 0 \quad (\text{答})$$

[问 6.6] 对于矢量场 f , 矢量场 V , 证明下式

$$(a) \operatorname{rot} \operatorname{grad} f = \nabla \times \nabla f = 0$$

$$(b) \operatorname{div} \operatorname{rot} V = \nabla \cdot (\nabla \times V) = 0$$

通常对于矢量场 V 如果 $\operatorname{rot} V = 0$, 就称这个矢量场是层状(lamellar)或者无旋场(irrotational)。这种情况, 矢量场 f 存在, 并可以写为 $V = \operatorname{grad} f$ 。这个 f 称为矢量场 V 的势函数或数量势(scalar potential)函数。

[例 6.5] 对于例 6.4 的矢量 V , 有 $\operatorname{rot} V = 0$, 求 V 的数量势函数。

[解] 由例 6.4 知

$$V = r^2 xi + r^2 yj + r^2 zk$$

$$V = \operatorname{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x} i + \frac{\partial f}{\partial y} j + \frac{\partial f}{\partial z} k$$

从上二式得

$$\frac{\partial f}{\partial x} = r^2 x \quad (a)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = r^2 y \quad (b)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = r^2 z \quad (c)$$

求同时满足这三个式子的 f 。若将式(a) 两边 y, z 看作常数对式(a) 两边积分

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= \int r^2 x dx + F(y, z) = \int (x^3 + xy^2 + xz^2) dx + F(y, z) \\ &= \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2}(y^2 + z^2) + F(y, z) \end{aligned} \quad (d)$$

式中, $F(y, z)$ 为 y, z 的任意函数。

式(d) 对 y 求偏导, 并采用式(b) 得

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 y + \frac{\partial F}{\partial y} = r^2 y = x^2 y + y^3 + yz$$

所以

$$\frac{\partial F}{\partial y} = y^3 + yz^2$$

将 z 视为常数而对上式两边积分

$$F(y, z) = \frac{y^4}{4} + \frac{y^2 z^2}{2} + G(z) \quad (e)$$

由于 $G(z)$ 为 z 的任意函数。将式(e) 代入式(d) 得

$$f(x, y, z) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2 y^2}{2} + \frac{z^2 x^2}{2} + \frac{y^4}{4} + \frac{y^2 z^2}{2} + G(z) \quad (f)$$

因此, 根据上式和式(c)

$$\frac{\partial f}{\partial z} = zx^2 + zy^2 + G'(z) = r^2 z = zx^2 + zy^2 + z^3$$

所以

$$G'(z) = z^3 \quad G(z) = \frac{z^4}{4} + C \quad (g)$$

式中, C 为积分常数。

将式(g) 代入式(f) 得

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= \frac{1}{4}(x^4 + y^4 + z^4 + 2y^2 z^2 + 2z^2 x^2 + 2x^2 y^2) + C \\ &= \frac{1}{4}(x^2 + y^2 + z^2)^2 + C = \frac{1}{4}r^4 + C \end{aligned} \quad (h)$$

这就是求得的数量势函数。

在矢量场 V 中, 如果 $\nabla \cdot V = 0$, 这个矢量场就称为是螺线的(solenoidal) 或者回旋的(rotational)。这种情况矢量场存在

$$\mathbf{V} = \text{rot} \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F}$$

这个 F 称为矢量势函数(vector potential)。

6.7 二维场的关系式

作为相当于定积分

$$\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a) \quad (6.67)$$

的二维公式,在边界为 C 的图 6.6 的区域 S 内,对 x, y 的函数 f, g , 成立

$$\begin{aligned} \iint_S \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} \right) dx dy &= \oint_C (f dy - g dx) \\ &= \oint_C \{ f \cos(x, u) + g \cos(y, n) \} dS \end{aligned} \quad (6.68)$$

式中的 n 表示边界上区域的外法线方向。 $(x, n), (y, n)$, 为 n 方向与 x, y 方向之间的夹角(高斯定理(Gauss' theorem))

[证明] 由图 6.6

$$\begin{aligned} \iint_S \frac{\partial f}{\partial x} dx dy &= \int_{y_A}^{y_B} [f(x, y)]_{x_1}^{x_2} dy = \int_{y_A}^{y_B} f(x_2, y) dy - \int_{y_A}^{y_B} f(x_1, y) dy \\ &= \int_{y_A}^{y_B} f(x_2, y) dy + \int_{y_B}^{y_A} f(x_1, y) dy = \oint_C f(x, y,) dy \end{aligned} \quad (a)$$

$$\begin{aligned} \iint_S \frac{\partial g}{\partial y} dx dy &= \int_{x_E}^{x_F} [g(x, y)]_{y_1}^{y_2} dx = \int_{x_E}^{x_F} g(x, y_2) dx - \int_{x_E}^{x_F} g(x, y_1) dx \\ &= - \int_{x_F}^{x_E} g(x, y_2) dx - \int_{x_E}^{x_F} g(x, y_1) dx = - \oint_C g(x, y,) dx \end{aligned} \quad (b)$$

由式(a) + (b), 得

$$\iint_S \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} \right) dx dy = \oint_C (f dy - g dx) \quad (c)$$

在图 6.6 中, 设以边界 C 上一个定点, 沿着边界走向, 区域 S 在左方向测得的弧长为 s , 式(c) 的右边的() 内, 由图 6.7 知为

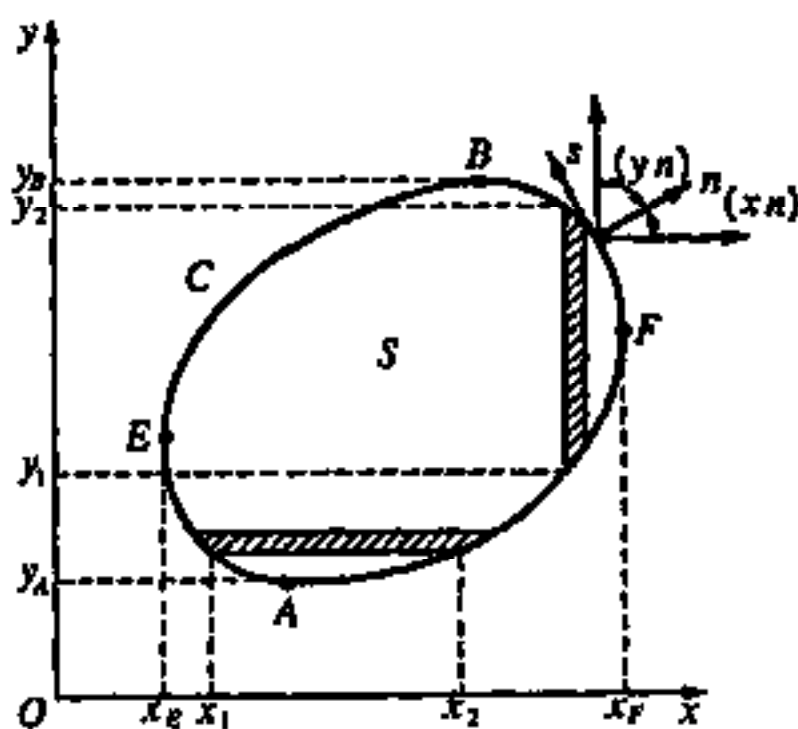
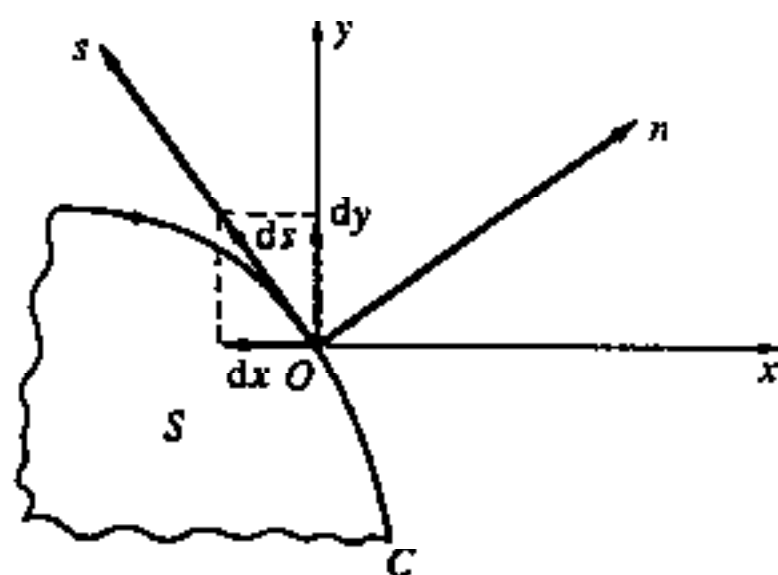


图 6.6 高斯定理的推导说明图

$$\begin{aligned}
 fdy - gdx &= \{f(dy/ds) - g(dx/ds)\}ds = \{f\cos(ys) - g\cos(xs)\}ds \\
 &= \{f\cos(xn) - g\cos[\pi - (yn)]\}ds = \{f\cos(xn) + g\cos(yn)\}ds
 \end{aligned} \quad (d)$$



将式(d)代入式(c)后即得式(6.68) (证毕)

$$(\angle xn) = \angle xOn, (\angle yn) = \angle yOn,$$

$$(\angle xs) = \angle xOs, (\angle ys) = \angle yOs$$

下面考虑 x, y 的函数 u, v , 设前面所记的 f, g 为

$$f = u \frac{\partial v}{\partial x}, \quad g = u \frac{\partial v}{\partial y} \quad (6.69)$$

图 6.7 边界的切线、法线、弧微分间的关系 将式(6.69)代入式(6.68), 则

$$\begin{aligned}
 &\iint_S u \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) dx dy + \iint_S \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy \\
 &= \int_C u \left(\frac{\partial v}{\partial x} dy - \frac{\partial v}{\partial y} dx \right) = \int_C u \frac{\partial v}{\partial n} ds
 \end{aligned} \quad (6.70)$$

若在式(6.70)中, 将 u 和 v 交换,

$$\begin{aligned}
 &\iint_S v \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) dx dy + \iint_S \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy \\
 &= \int_C v \frac{\partial u}{\partial n} ds
 \end{aligned} \quad (6.71)$$

式(6.70), 式(6.71) 称为格林第一公式 (Green's first identity)

二维的拉普拉斯算子与三维时同样用 ∇^2 表示, 记为

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (6.72)$$

式(6.70) 减去式(6.71) 得

$$\iint_S (u \nabla^2 v - v \nabla^2 u) dx dy = \int_C \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds \quad (6.73)$$

这式子称为格林第二公式 (Green's second identity)

在式(6.73)中, 作为特殊情况, 设 $v \equiv 1$, 得

$$\iint_S \nabla^2 u dx dy = \int_C \frac{\partial u}{\partial n} ds \quad (6.74)$$

而且, u 为满足二维的拉普拉斯方程式(Laplace equation)

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (6.75)$$

的函数, 即为调和函数(harmonic function), 将式(6.75)代入式(6.74)得

$$\int_C \frac{\partial u}{\partial n} ds = 0 \quad (6.76)$$

这个式子对于在调和函数的边界上的通量(flux) $\frac{\partial u}{\partial n}$ 成立的重要公式。从式(6.76)

可以导得下面叙述的高斯算术平均值理论(Gauss' theorem of arithmetic mean), 如果函数 $u(x, y)$ 在闭圆内部, 即在 $(x-a)^2 + (y-b)^2 \leq r^2$ 处为调和函数, 那么, 在圆的中心 u 的值是在圆周的 u 值的算术平均值, 如果将它用公式表示, 对于图 6.8 为

$$u(a, b) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a + r\cos\theta, b + r\sin\theta) d\theta \quad (6.77)$$

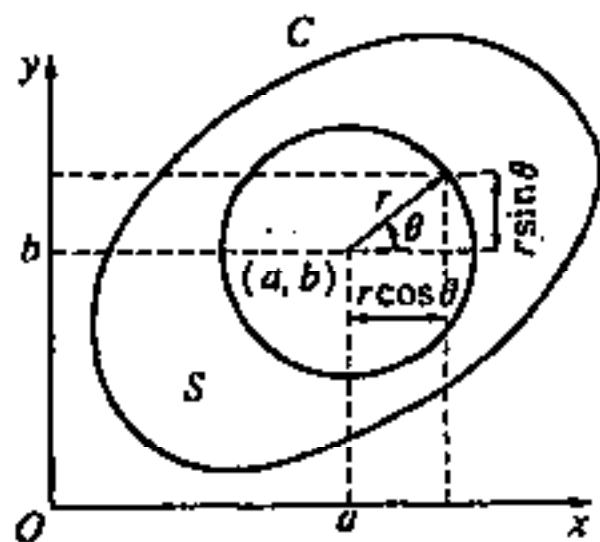


图 6.8 高斯算术平均值定理说明图

[证明] 若式(6.76)适用于半径 ρ ($0 \leq \rho \leq r$) 的圆形区域的边界 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = \rho^2$, 因为 $\frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial \rho}$, $ds = \rho d\theta$, 所以

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial \rho} u(a + \rho\cos\theta, b + \rho\sin\theta) d\theta = 0$$

或者由式(5.37)得 $\frac{\partial}{\partial \rho} \int_0^{2\pi} u(a + \rho\cos\theta, b + \rho\sin\theta) d\theta = 0$

这个式子表明积分与 ρ 无关。因此, 不论 ρ 为何值, 积分

$$\int_0^{2\pi} u(a + \rho\cos\theta, b + \rho\sin\theta) d\theta \quad (a)$$

都为同样的值。而且, 对于这个积分, 作为 $\rho = r$ 时的积分和 $\rho = 0$ 时的值

$$\int_0^{2\pi} u(a, b) d\theta = u(a, b) \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi u(a, b) \quad (b)$$

相互相等。因此, 在式(a)中 $\rho = r$ 的情况与式(b)相等, 故得式(6.77) (证毕)

[问 6.7] 求证雷利 - 格林公式(Rayleigh-Green's identity)

$$\begin{aligned}
 & \iint_S (u \nabla^4 v - v \nabla^4 u) dx dy \\
 &= \int_C \left(u \frac{\partial}{\partial n} \nabla^2 v - \nabla^2 v \frac{\partial u}{\partial n} - v \frac{\partial}{\partial n} \nabla^2 u + \nabla^2 u \frac{\partial v}{\partial n} \right) ds \quad (6.78)
 \end{aligned}$$

[提示] 变形为

$$\begin{aligned}
 & \iint_S (u \nabla^4 v - v \nabla^4 u) dx dy \\
 &= \iint_S (u \nabla^4 v - \nabla^2 u \nabla^2 v) dx dy - \iint_S (u \nabla^4 u - \nabla^2 u \nabla^2 v) dx dy
 \end{aligned}$$

后对右边的二个积分应用格林第二公式(6.73)

6.8 三维场的关系式

与二维场的情况一样,在三维的情况下,下列各式也成立.详细的推导省略。

A. 高斯定理

若设三维区域 R 的边界曲面为 S , 则对于 x, y, z 的函数 f, g, h 有

$$\begin{aligned}
 & \iiint_R \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z} \right) dx dy dz \\
 &= \iint_S \{ f \cos(xn) + g \cos(yn) + h \cos(zn) \} dS \quad (6.79)
 \end{aligned}$$

采用以 f, g, h 为分量的矢量场

$$F = fi + gj + hk$$

和边界曲面的单位法线矢量

$$n = \cos(xn)i + \cos(yn)j + \cos(zn)k$$

可将式(6.79)记为

$$\int_R \operatorname{div} F dV = \int_S F \cdot n dS \quad (6.80)$$

式中将 $\iiint_R \cdots dx dy dz, \iint_S \cdots dS$ 略记为 $\int_R \cdots dV, \int_S \cdots dS$

B. 格林公式

格林第一公式可以用下式给出:

$$\int_R u \nabla^2 v dV + \int_R \nabla u \cdot \nabla v dV = \int_S u \frac{\partial v}{\partial n} dS \quad (6.81)$$

式中
$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}i + \frac{\partial}{\partial y}j + \frac{\partial}{\partial z}k \quad \nabla^2 = \nabla \cdot \nabla \quad (6.82)$$

式(6.82)减去式(6.81)中将 u, v 交换后的式子,得格林第二公式

$$\int_R (u \nabla^2 v - v \nabla^2 u) dV = \int_S \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS \quad (6.83)$$

[问 6.8] 从式(6.79)推导式(6.81)

[问 6.9] 从式(6.74)减去式(6.77)的式子为怎样的三维情况?

C. 斯托克斯(Stokes)定理

在矢量场 $F = fi + gj + hk$, 令如图 6.9 所示的曲面 S 的边界闭曲线为 C , 若规定 C 的走向与曲面 S 的单位法线矢量 n 的方向如图 6.9 所示, 则

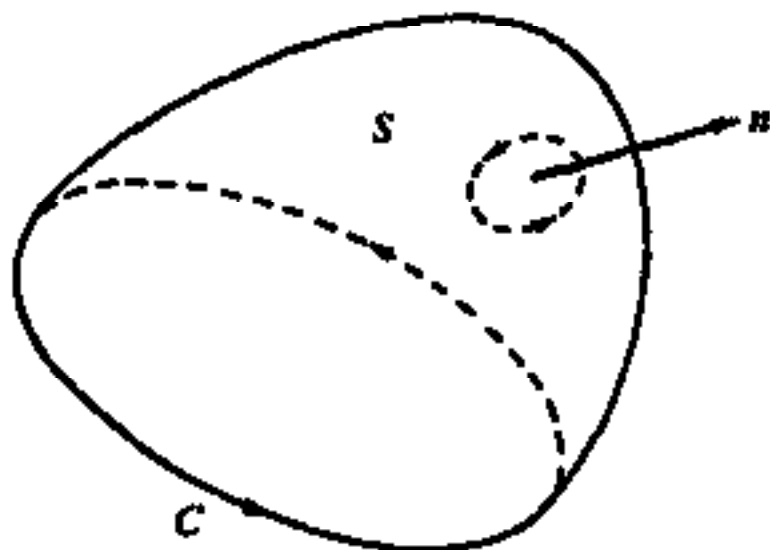


图 6.9 斯托克斯定理的说明图

$$\begin{aligned} \int_C (f dx + g dy + h dz) = \iint_S \left\{ \left(\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z} \right) \cos(nx) + \left(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial x} \right) \cos(ny) \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) \cos(nz) \right\} dS \end{aligned} \quad (6.84)$$

或者用矢量记号可以记作

$$\int_C F \cdot dr = \int_S (\text{rot} F) \cdot n dS \quad (6.85)$$

习 题 6

6.1 如图 6.10 所示, 证明闭曲线 $AFBE$ 内的面积可以用

$$-\oint_C y dx, \quad \oint_C x dy, \quad \frac{1}{2} \oint_C (x dy - y dx)$$

给出

[提示]
$$\int_{AEB} y dx = \text{面积 } A'AE B B'$$

$$\int_{BFA} y dx = - \int_{AFB} y dx = -(\text{面积 } A'AF B B')$$

$$-\oint y dx = \int_{AEB} y dx + \int_{BFA} y dx$$

6.2 证明用图 6.11 所示的内外两个闭曲线 C_1, C_2 围住的环形区域 (ring domain) (也称双重连接区域 (double-connected domain 或 double connected region)) S 的面积可以用

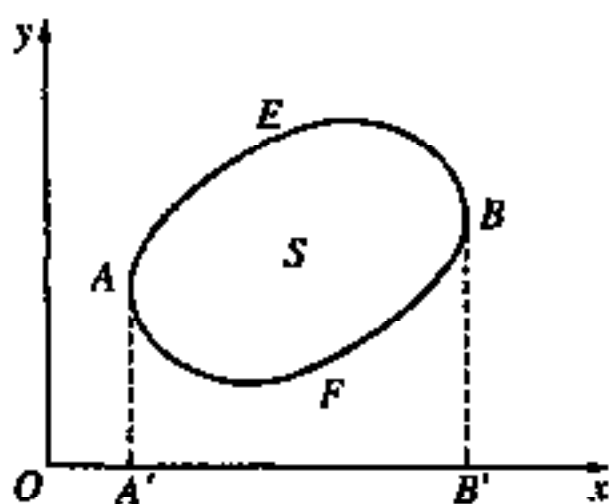


图 6.10

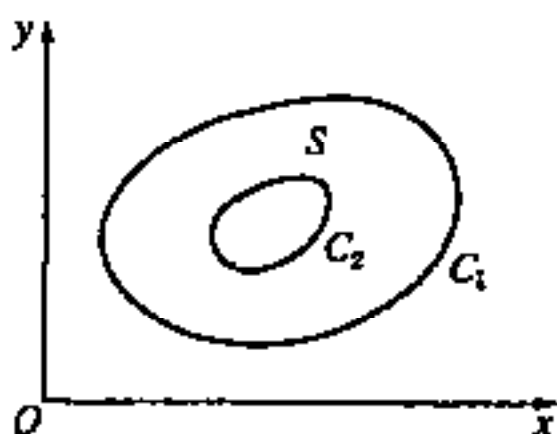


图 6.11

$$\frac{1}{2} \left\{ \oint_{C_1} (xdy - ydx) + \oint_{C_2} (xdy - ydx) \right\}$$

给出

6.3 将习题 6.1 中的直角坐标面积公式

$$\frac{1}{2} \oint_C (xdy - ydx)$$

变换为极坐标公式。

6.4 当 $f = \log(x^2 + y^2)$ 时, 求下面各式, 设 x, y 不全为零。

(a) $\text{grad } f$ (b) $\text{div}(\text{grad } f)$

6.5 当 $r = xi + yj + zk$, $r = |r|$ 时, 求下面各式

(a) ∇r (b) $\nabla \cdot r$ (c) ∇r^4 (d) $\nabla(r^2 e^{-r})$

6.6 当 f, g 仅为 x, y 的函数, 且 $\nabla^2 f = 0, \nabla^2 g = 0$ 时, 证明下列各式成立。

(a) $\nabla^2 \left(x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} \right) = 0$ (b) $\nabla^2 \left(y \frac{\partial f}{\partial x} - x \frac{\partial f}{\partial y} \right) = 0$

(c) $\nabla^4(f + xg) = 0$ (d) $\nabla^4(f + r^2 g) = 0$ (式中 $r^2 = x^2 + y^2$)

6.7 当 $V = y^2 z^2 i + x^2 z^2 j + x^2 y^2 k$ 时, 求

(a) $\text{rot } V$ (b) $\text{rot}(\text{rot } V)$

6.8 对于数量场 f, g 及矢量场 V, W , 证明下列公式成立。

(a) $\text{rot}(fV) = f \text{rot } V + \nabla f \times V$

(b) $\text{rot rot } V = \nabla \text{div } V - \nabla^2 V$

(c) $\text{grad}(V \cdot W) = (V \cdot \nabla)W + (W \cdot \nabla)V + V \times \text{rot } W + W \times \text{rot } V$

(d) $\text{div}(V \times W) = W \text{rot } V - V \text{rot } W$

(e) $\text{rot}(V \times W) = (W \cdot \nabla)V - (V \cdot \nabla)W + V \text{div } W - W \text{div } V$

(f) $(V \cdot \nabla)f = V \cdot \nabla f$

(g) $(fV \cdot \nabla)gW = fg(V \cdot \nabla)W + (fV \cdot \nabla g)W$

6.9 在点 (ξ, η, ζ) 处有电荷 e 时, 在离该点距离为 r 的点 $P(x, y, z)$ 处的静电势可以用下式给

出

$$f(x, y, z) = \frac{e}{r}, \quad r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2}$$

(a) 如果点 (x, y, z) 与点 (ξ, η, ζ) 不一致, 则 $\nabla^2 f = 0$ 成立, 因此, 对于在内部不含 e 的区域 R 的边界 S , 求证:

$$\iint_S \frac{\partial f}{\partial n} dS = 0$$

成立。

[提示] 考虑式(6.83)中 $u = 1, v = f$ 的情况。

(b) 考虑图 6.12 所示内部带电荷 e 的区域 R , 考虑将以电荷点 (ξ, η, ζ) 为中心的区域 R 包括在内的球面 Σ . 对于用 S 与 Σ 围住的区域 R_Σ , 说明下式成立的理由。

$$\iint_S \frac{\partial f}{\partial n} dS + \iint_\Sigma \frac{\partial f}{\partial n} dS = 0$$

式中, 对于面 S, Σ, n 取如图 6.12 所示, 从围住 S, Σ 的区域内朝着区域外的方向。

(c) 在边界 Σ 上确认 $\frac{\partial f}{\partial n} = -\frac{\partial f}{\partial r}$ 后证明

$$\iint_\Sigma \frac{\partial f}{\partial n} dS = 4\pi e$$

对于在内部含有电荷 e 的区域 R 的边界 S , 证明:

$$\iint_S \frac{\partial f}{\partial n} dS = -4\pi e$$

6.10 当 f 为调和函数时, 证明下式成立。

$$\int_R (\text{grad } f)^2 dV = \int_S f (\text{grad } f \cdot n) dS$$

6.11 在图 6.13 所示的 x, y 坐标平面内的单连通区域(没有孔的区域, 参见 P. 116 注脚) R 内, 对于 $\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial x}$ 连续的函数 f, g , 当从区域 R 内的点 A 至 B 的线积分

$$\int_A^B \{f(x, y) dx + g(x, y) dy\}$$

沿图示的 C_1 或沿图示的 C_2 , 其结果相等时, 沿由 C_1 与 C_2 形成的闭曲线, 绕图示的箭头经过一周的积分

$$\oint_{C_1+C_2} \{f(x, y) dx + g(x, y) dy\}$$

为零, 并证明反之也成立。

从这种情况证明, 沿连接 x, y 平面的区域 R 内的任意二点 A, B 的曲线线积分为与路径没有关系的同一个值的必要充分条件, 是在 R 内

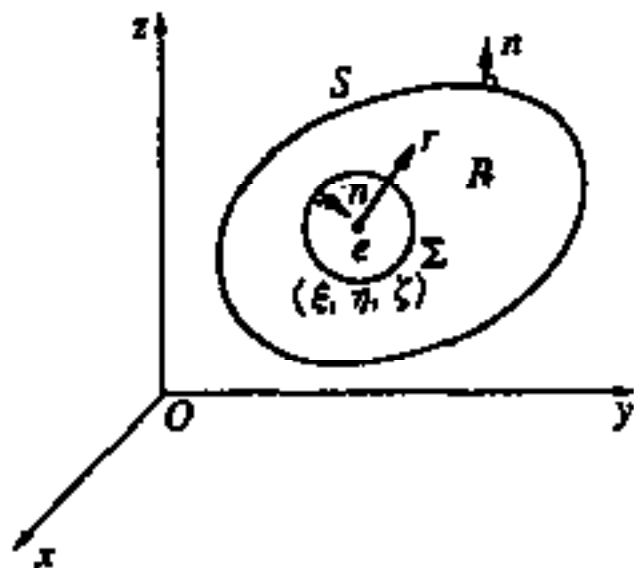


图 6.12

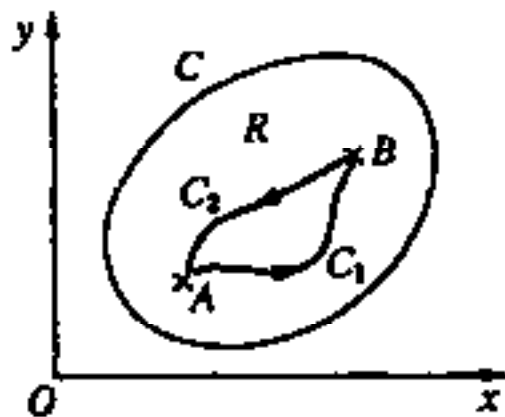


图 6.13

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y}$$

成立.

[提示] 考虑在二维高斯定理(式(6.68))中,用 $-g$ 取代 g .

6.12 证明在空间区域 R 内函数 $f(x, y, z), g(x, y, z), h(x, y, z)$ 的一阶偏导数连续时,区域内任意二点 A, B 间的线积分

$$\int_A^B \{f(x, y, z)dx + g(x, y, z)dy + h(x, y, z)dz\}$$

对于连接 A, B 区域内的哪条路径都为同一值的必要充分条件是

$$\frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial z}, \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y}$$

第7章 复数与复变函数

7.1 复数

将 (-1) 的平方根用 i 表示,即

$$i \equiv \sqrt{-1}, \quad i^2 = -1 \quad (7.1)$$

当 a, b 为实数时

$$\alpha = a + bi \quad (7.2)$$

将 α 称为复数(complex number),将 a 称为复数的实部(real part),将 b 称为复数的虚部(imaginary part)^①。将复数 α 的实部、虚部写成

$$a = \operatorname{Re}(\alpha), \quad b = \operatorname{Im}(\alpha) \quad (7.3)$$

简记为

$$a = R(\alpha), \quad b = I(\alpha) \quad (7.4)$$

仅改变式(7.2)虚部符号的复数为

$$\bar{\alpha} \equiv a - bi \quad (7.5)$$

称为 α 的共轭复数(conjugate complex number)。另外

$$|\alpha| \equiv \sqrt{a^2 + b^2} \quad (7.6)$$

将 $|\alpha|$ 称为复数 α 的模(absolute value)。

复数在此作为新的数被引入,因而要规定其运算规则。

(a) 相等 两个复数相等,即

$$a + bi = c + di \quad (7.7)$$

必定是

$$a = c, \quad b = d \quad (7.8)$$

(b) 加减法

$$(a + bi) \pm (c + di) = (a \pm c) + i(b \pm d) \quad (7.9)$$

^① $b=0$ 时, $\alpha=a$, 即 α 为实数, $a=0$ 时, $\alpha=bi$, 将此形式的复数称为纯虚数(pure imaginary number)。

(c) 乘法

$$(a+bi)(c+di) = (ac-bd) + i(ad+bc) \quad (7.10)$$

(d) 除法

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i \quad (7.11)$$

[问 7.1] 设 $z_1 = 4-5i, z_2 = 3+6i$, 试计算:

- (a) $\operatorname{Re}(z_1)$ (b) $\operatorname{Im}(z_1)$ (c) $z_1 + z_2$ (d) $z_1 - z_2$ (e) $z_1 z_2$
 (f) z_1 / z_2 (g) $|z_1 + z_2|$ (h) $|z_1 z_2|$ (i) $\bar{z}_1 - \bar{z}_2$ (j) $\sqrt{z_1 \bar{z}_1}$

7.2 复平面与极形式

与实数可用数轴上的点表示相类似, 复数可以用平面上的点表示。即复数

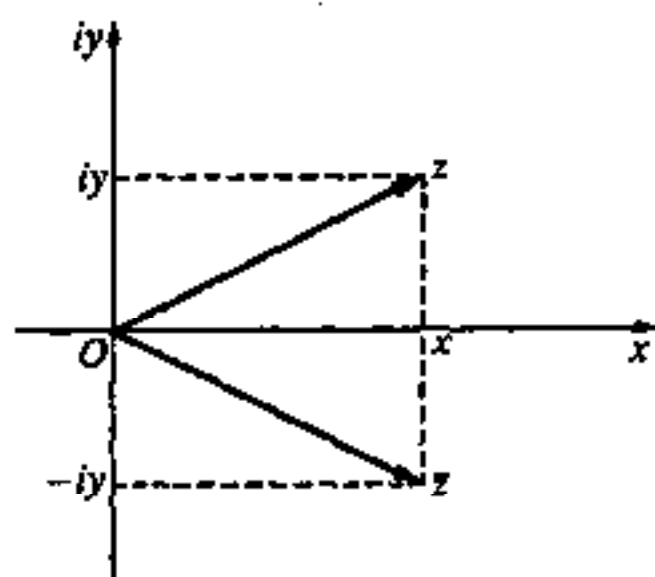


图 7.1 共轭复数

$z = x + iy$ 可由实数 (x, y) 确定, 所以能够用直角坐标 (x, y) 的点表示复数 z 。像这样把复数与平面上的点一一对应的时候, 则将这个平面称为复平面 (complex plane)、高斯平面 (Gauss plane)、阿尔甘平面 (Argand plane)。因为复平面的横轴上的点用实数表示, 纵轴上的点用纯虚数表示, 所以将横轴称为实轴 (real axis), 纵轴称为虚轴 (imaginary axis)。另外相互共轭的复数 $z = x + iy, \bar{z} = x - iy$ 是如图 7.1 那样的相对实轴的对称的两点, 其绝对值

$$|z| = |\bar{z}| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(x+iy)(x-iy)} = \sqrt{z\bar{z}} \quad (7.12)$$

是相等的。

对复数的各种运算, 根据复平面可以作出几何学的解释。

(a) 加法与减法 两个复数

$$z_1 = x_1 + iy_1, \quad z_2 = x_2 + iy_2 \quad (7.13)$$

给定后, 其和为

$$z = z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \quad (7.14)$$

由图 7.2 可知, 对应于从点 O 到 z_1, z_2, z 所引出的矢量的矢量和可表示为

$$\vec{Oz_1} + \vec{Oz_2} = \vec{Oz} \quad (7.15)$$

这样的复数也可用从 O 到复数用引出的矢量来表示, 称为复数矢量 (complex

vector)。关于 z_1 与 z_2 的差

$$z = z_1 - z_2 \quad (7.16)$$

可以理解为矢量的差

$$\vec{Oz} = \vec{Oz_1} - \vec{Oz_2} \quad (7.17)$$

因为平面上的点也能用极坐标 (r, θ) 表示, 所以复数

$$z = x + iy \quad (7.18)$$

也可以用复平面上的点 z 的极坐标表示。根据图 7.3 平面直角坐标 (x, y) 与极坐标 (r, θ) 的关系, 由

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta \quad (7.19)$$

或逆运算关系, 由

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|, \quad \theta = \arctan \frac{y}{x} = \arg z$$

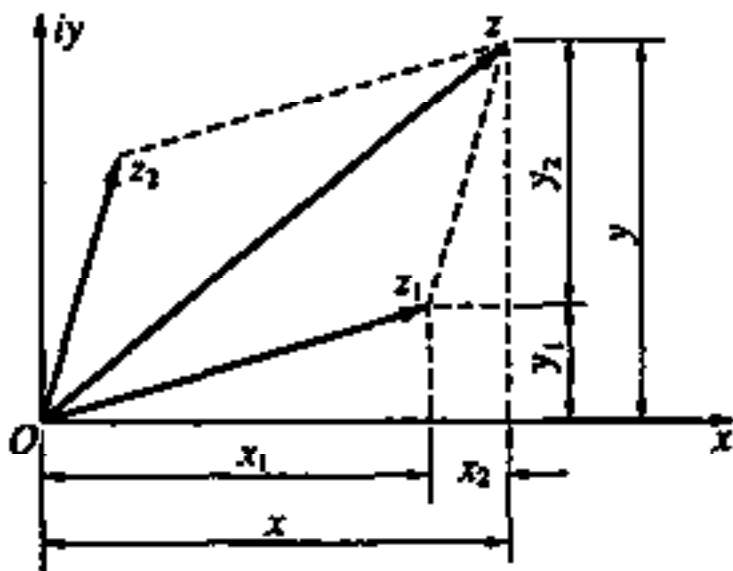


图 7.2 复数的加法

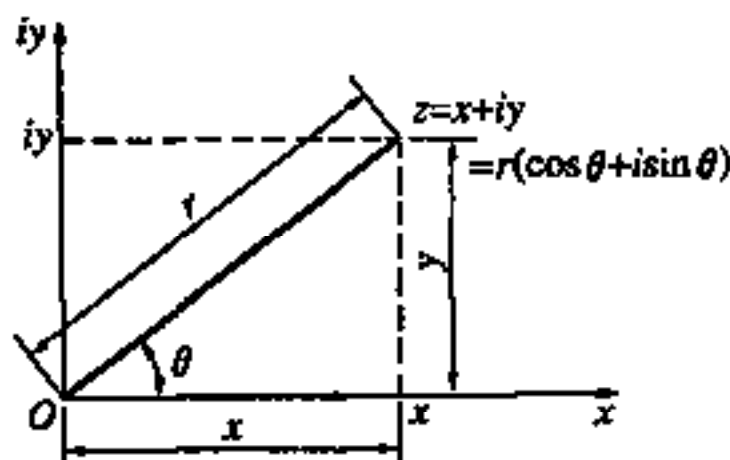


图 7.3 复数的直角坐标表示与极坐标表示(极形式)

给出。在此 $\arg z$ 为从复数矢量 \vec{Oz} 的实轴测得的偏角(argument) θ 。将式(7.19)代入式(7.18), 就变为

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta) \quad (7.20)$$

这样可以将复数 z 用其绝对值 r 和偏角 θ 表示。将复数 z 用式(7.20)表示的形式称为复数的极形式(polar form), 在乘、除、幂、幂根的计算时是方便的。

【例 7.1】 试求两个复数

$$z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1), \quad z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$$

的积 $z_1 z_2$ 。

【解】 $z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$

展开右边的括弧,并代入 $i^2 = -1$

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 \{ (\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2) + i(\sin \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_2 \cos \theta_1) \}$$

对右式,应用两角和的三角函数

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 \{ \cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2) \} \quad (7.21)$$

[问 7.2] 对于例 7.1 的 z_1, z_2 , 试表示出

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \{ \cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2) \}$$

[例 7.2] 试求 $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ 时的 z^n 。

[解] 在例 7.1 中,如设 $z_1 = z, z_2 = z$, 就有

$$z^2 = z \cdot z = r^2 \{ \cos(\theta + \theta) + i \sin(\theta + \theta) \} = r^2 (\cos 2\theta + i \sin 2\theta)$$

如设 $z_1 = z^2, z_2 = z$, 就有

$$z^3 = z^2 \cdot z = r^2 \cdot r \{ \cos(2\theta + \theta) + i \sin(2\theta + \theta) \} = r^3 (\cos 3\theta + i \sin 3\theta)$$

同理可得

$$z^n = r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta) \quad (7.22)$$

[问 7.3] 试根据数学归纳法证明式(7.22)成立。

如设在式(7.22)左边代入式(7.20), 并且 $r=1$ 时, 就成为

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta \quad (7.23)$$

将这称为棣莫佛(De Moivre)定理。

[例 7.3] 试用极形式求满足 $z^3 = 8$ 的三个 z 。

[解] 如将所求的 z 设为

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta) \quad (a)$$

代入到推出的方程式中,再用棣莫佛定理,对比

$$r^3 (\cos 3\theta + i \sin 3\theta) = 8 = 8 \underbrace{(\cos 2k\pi)}_1 + i \underbrace{\sin 2k\pi}_0$$

两边的绝对值与偏角,就得到

$$r = 2, \quad \theta = \frac{2k}{3}\pi \quad (b)$$

在此, k 可以取任意的整数,但是因偏角仅相差 2π , 可得到相同复数,因此,只计算

$k=0, 1, 2$ 三种即可, 将式(b)代入式(a), 就求得对应三种 k 的 z , 即

$$k=0 \text{ 时, } z_0 = 2(\cos \theta + i \sin \theta) = 2$$

$$k=1 \text{ 时, } z_1 = 2\left(\cos \frac{2}{3}\pi + i \sin \frac{2}{3}\pi\right) = -1 + \sqrt{3}i$$

$$k=2 \text{ 时, } z_2 = 2\left(\cos \frac{4}{3}\pi + i \sin \frac{4}{3}\pi\right) = -1 - \sqrt{3}i$$

以上的 z_0, z_1, z_2 就是求得的三个 z 。

[问 7.4] 试解下列方程式, 并将解画在复平面上。

$$(a) z^3 = 1 \quad (b) z^2 = 1 + \sqrt{3}i \quad (c) z^4 + 16 = 0$$

7.3 复变函数

A. 正则函数

设 x, y 为实变数时,

$$z = x + iy$$

成为复变函数。对复数 z 按一定的规律得到对应的复数 $w = u + iv$ 时, w 即为 z 的函数(function), 表示为 $w = f(z)$ 。

[例 7.4] 找出 z 的二次方与 w 间的规律时, 试用 u, v 表示 x, y 。

$$[\text{解}] \quad w = f(z) = z^2$$

$$\text{所以 } u + iv = (x + iy)^2 = (x^2 - y^2) + 2ixy$$

$$u^2 = x^2 - y^2, \quad v = 2xy$$

这样 $w = f(z)$ 时, w 的实部 u 和虚部 v 为 x, y 的函数 $u(x, y), v(x, y)$ 。即

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \quad (7.24)$$

接下来研究复变函数的微分法。设与实变函数的微分法同样的式子

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \quad (7.25)$$

$\Delta z \rightarrow 0$ 有从任意方向趋近于 0 的可能性, 但是不论从哪个方向趋近于 0, 式(7.25)收敛于同一个极限值时, 为可微分(differentiable)。把式(7.25)称为式(7.24)的导数, (微商)(differential coefficient)^①。

① 实变函数时, 这个研究方法也是同样的。实变函数时, 将 Δx 不论从正的一边趋近于 0 还是从负的方向趋近于 0, 式(7.25)收敛于同一极限值时, $f(z)$ 是用 z 可微, 根据式(7.25)得到导数(微商)。

z 平面的某区域 R 内一切的点 z 上, 函数 $w=f(z)$ 可微时, $w=f(z)$ 在区域 R 上是正则 (regular) 的, 将正则的函数称为正则函数 (regular function) 或解析函数 (analytic function)。此时, 对点 z 的导数 $f'(z)$ 是 R 内 z 的函数, 称为 $w=f(z)$ 的导函数 (derivative)。

式 (7.25) 可改写成如下形式:

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{u(x+\Delta x, y+\Delta y) + iv(x+\Delta x, y+\Delta y) - u(x, y) - iv(x, y)}{\Delta x + i\Delta y}\end{aligned}\quad (7.26)$$

假如 $f(z)$ 为正则, $\Delta z = \Delta x + i\Delta y \rightarrow 0$ 时, 不论 $\Delta y=0$ 还是 $\Delta x=0$, 式 (7.26) 理应趋近于同一极限值。

如首先研究 $\Delta y=0$ 而 $\Delta z=\Delta x$ 时, 式 (7.26) 成为

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{u(x+\Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x} + i \frac{v(x+\Delta x, y) - v(x, y)}{\Delta x} \right] \quad (7.27)$$

即为

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \quad (7.28)$$

另外, 如研究 $\Delta x=0$ 而 $\Delta z=i\Delta y$ 时, 式 (7.26) 成为

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \left[\frac{u(x, y+\Delta y) - u(x, y)}{i\Delta y} + \frac{v(x, y+\Delta y) - v(x, y)}{\Delta y} \right] \quad (7.29)$$

即为

$$\frac{dw}{dz} = -i \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \quad (7.30)$$

如果说函数 $w=f(z)$ 是正则的, 则式 (7.28) 和 (7.30) 必须相等。从而

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad (7.31)$$

将这称为柯西-黎曼方程 (Cauchy-Rimann differential equation)。以上揭示出式 (7.31) 是 $f(z)$ 正则的必要条件。反之也能够证明式 (7.31) 是 $f(z)$ 正则的充分条

件,但在此不再阐述^①。

对式(7.31)第1式用 x 偏微分,对第2式用 y 偏微分,将两边分别相加,得

$$\nabla^2 u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (7.32)$$

对式(7.31)第1式用 y 偏微分,第2式用 x 偏微分,将两边分别相加,得

$$\nabla^2 v \equiv \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \quad (7.33)$$

在此有

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (7.34)$$

根据式(7.32), (7.33)^②, u, v 满足二阶的拉普拉斯方程,因而是调和函数。特别地,将满足柯西-黎曼方程(7.31)的两个调和函数互称为共轭调和函数(Conjugate harmonic function)。

【例 7.5】 复变函数 $w=2x+iy$ 是正则函数吗?

【解】 $u(x, y)=2x, \quad v(x, y)=y$

因而 $\frac{\partial u}{\partial x}=2, \quad \frac{\partial u}{\partial y}=0, \quad \frac{\partial v}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial v}{\partial y}=1$

所以

$$\frac{\partial u}{\partial x} \neq \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} \neq -\frac{\partial v}{\partial x}$$

因而柯西-黎曼方程(7.31)的第二式成立,而第一式不满足。故不是正则函数。

【问 7.5】 复变函数 $w=(x^2-y^2)+2ixy$ 是正则函数吗?

【例 7.6】 给定正则函数 $f(z)=u(x, y)+iv(x, y)$ 的实部 $u(x, y)$ 时,试求用 $u(x, y)$ 表示虚部 $v(x, y)$ 的公式。

【解】 从正则函数 $f(z)$ 所定义的区域 R 内的定点 $z_0=x_0+iy_0$ 引到 R 内的动点 $z=x+iy$, 考虑沿图 7.4 那样区域 R 内的曲线的线积分^③

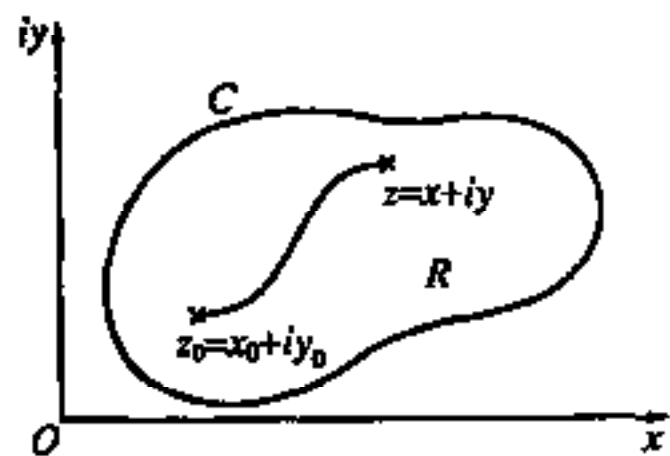


图 7.4 已知正则函数的实部, 求虚部时的积分路径

① 高木:解析概论(修订第3版),岩波(1961),p. 203.

② 参照上一章的式(6.75)。

③ ()内是全微分,因此,右边的积分与从 (x_0, y_0) 到 (x, y) 的曲线路径没有关系。但是,这是 R 如图 7.4 那样,为没有孔的,即是单连通区域(simply connected domain)时,有 $C=v(x_0, y_0)$ 。

$$v(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \left(\frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy \right) + C \quad (a)$$

在式(a)代入柯西-黎曼的微分方程式(7.31)

$$v(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \left(-\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy \right) + C \quad (7.35)$$

这是仅已知正则函数的实部时,求其虚部的公式。但是在这个式中,含有 C 的任意常数。

[问 7.6] 仅已知正则函数 $f(x)$ 的实部 $u(x, y)$ 时,试用 u 表示 $f(z)$ 。反之,仅已知 $f(x)$ 的虚部 $v(x, y)$ 时,试用 v 表示 $f(x)$ 。

B. 复变函数的初等函数

当复变函数 z 的指数函数、三角函数为实函数时,用与这些函数的马克劳林展开 (Maclaurin's expansion) 同形的下列级数来定义。

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad (7.36)$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \quad (7.37)$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (7.38)$$

如这样定义,特别是 z 为实数时,已知的指数函数和三角函数不仅相一致,而且可以考虑到 z 为复数时的情况,因此为实变数时的这些函数向复变函数的情况扩充。

如在式(7.36)中, z 用 iz 代入

$$\begin{aligned} e^{iz} &= 1 + \frac{iz}{1!} + \frac{(iz)^2}{2!} + \frac{(iz)^3}{3!} + \frac{(iz)^4}{4!} + \cdots \\ &= \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots \right) + i \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots \right) = \cos z + i \sin z \end{aligned}$$

因此

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z \quad (7.39)$$

把此式称为欧拉公式(Euler's formula)。在此式中, z 用 $-z$ 代入,得

$$e^{-iz} = \cos z - i \sin z \quad (7.40)$$

从而,根据式(7.39)、(7.40)

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \quad (7.41)$$

在式(7.41)的右边除以 i 的式

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \quad \sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \quad (7.42)$$

将上式定义的函数 \cosh, \sinh 称为双曲函数(hyperbolic function)。双曲函数和三角函数完全一样,还有下列定义的4种函数。

$$\begin{aligned} \tanh z &= \frac{\sinh z}{\cosh z} & \coth z &= \frac{\cosh z}{\sinh z} \\ \operatorname{sech} z &= \frac{1}{\cosh z} & \operatorname{csch} z &= \frac{1}{\sinh z} \end{aligned} \quad (7.43)$$

[问 7.7] 试求 $\cosh z, \sinh z$ 的马克劳林展开式,并与 $\cos z, \sin z$ 的马克劳林展开式比较,阐述异同点。

[问 7.8] 试证明下列式。

$$\left. \begin{aligned} (a) \sinh z &= -i \sin iz \\ (b) \cosh z &= \cos iz \\ (c) \sinh(iz) &= i \sin z \\ (d) \cosh(iz) &= \cos z \end{aligned} \right\} \quad (7.44)$$

如用欧拉公式,将上节叙述的复数极坐标形式表示成指数形式是方便的。即式(7.20)可以写成

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta) = re^{i\theta} \quad (7.45)$$

[问 7.9] 把下列的复数,表示成指数函数的极坐标形式 $re^{i\theta}$ 的形式。

(a) $\sqrt{3} + i$ (b) $2i$ (c) -5 (d) $1 + i$ (e) $1 - \sqrt{3}i$ (f) $-i$ (g) $-3 - 3i$

[例 7.7] 在同步发电机中,电枢线圈如图 7.5 那样就分线圈串联连接时,图中的线圈 $1, 2, 3, \dots, n$ 的电动势为 $E, Ee^{i\alpha}, Ee^{2i\alpha}, \dots, Ee^{(n-1)i\alpha}$ 。在此, α 为各线圈的位相差。试求此发电机总电动势 e 的绝对值。

[解] 因为线圈 $1, 2, \dots, n$ 是串联连接,所以发电机总电动势是各线圈电动势的和

$$e = E + Ee^{i\alpha} + Ee^{2i\alpha} + \dots + Ee^{(n-1)i\alpha} = E \frac{1 - e^{in\alpha}}{1 - e^{i\alpha}}$$

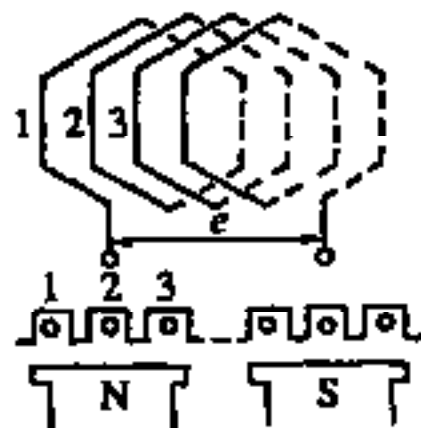


图 7.5 电枢线圈就分线圈串联连接的同步发电机的电动势

这个绝对值^①

$$\begin{aligned}|e| &= E \frac{|1 - e^{ina}|}{|1 - e^a|} = E \sqrt{\frac{(1 - e^{ina})(1 - e^{-ina})}{(1 - e^a)(1 - e^{-a})}} \\&= E \sqrt{\frac{2 - 2\cos na}{2 - 2\cos a}} = E \sqrt{\frac{\sin^2(na/2)}{\sin^2(a/2)}} = E \left| \frac{\sin(na/2)}{\sin(a/2)} \right|\end{aligned}$$

其次,可以将以上的指数函数、三角函数拆分为式(7.24)形式的实部、虚部。

(a) 指数函数的情况

$$\begin{aligned}w = f(z) &= e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y) \\&= e^x \cos y + i e^x \sin y\end{aligned}\quad (7.46)^{\textcircled{2}}$$

因此

$$u(x, y) = e^x \cos y, \quad v(x, y) = e^x \sin y \quad (7.47)$$

又将 n 设为整数时

$$\begin{aligned}e^{z+2n\pi i} &= e^{x+i(y+2n\pi)} = e^x \{\cos(y+2n\pi) + i \sin(y+2n\pi)\} \\&= e^x (\cos y + i \sin y) = e^x e^{iy} = e^{x+iy} = e^z\end{aligned}\quad (7.48)$$

所以,指数函数具有 $2\pi i$ 的周期。

(b) 三角函数的情况

$$\begin{aligned}w = f(z) &= \cos z = \cos(x+iy) = \frac{e^{i(x+iy)} + e^{-i(x+iy)}}{2} \\&= \frac{e^{-y}(\cos x + i \sin x) + e^y(\cos x - i \sin x)}{2} \\&= \left(\frac{e^y + e^{-y}}{2}\right) \cos x - i \left(\frac{e^y - e^{-y}}{2}\right) \sin x \\&= \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y\end{aligned}$$

因而

① 式(7.12),用 $|z| = \sqrt{zz}$ 。

② $e^{x+iy} = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{(x+iy)^N}{N!} = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{N!} \sum_{m=0}^N C_N^m x^m (iy)^{N-m} = \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{m=0}^N \frac{x^m (iy)^{N-m}}{N!} C_N^m$
 $= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^m (iy)^n}{(m+n)!} C_{m+n}^{m+n} \quad (\text{或 } N=m+n) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^m (iy)^n}{m! n!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^n}{n!} = e^x e^{iy}$

$$\left. \begin{aligned} u(x, y) &= \cos x \cosh y \\ v(x, y) &= -\sin x \sinh y \end{aligned} \right\} \quad (7.49)$$

[问 7.10] 试确定由式(7.47)及式(7.49)给出的 $u(x, y), v(x, y)$ 满足柯西-黎曼的微分方程式(7.31)。

[问 7.11] 试求下列复变函数的实部 $u(x, y)$, 虚部 $v(x, y)$ 。试确定这些函数满足柯西-黎曼微分方程式。

(a) $\sin z$ (b) $\cosh z$ (c) $\sinh z$

其次, 求指数函数(7.46)的逆函数。在式(7.46)中代入 w 和 z

$$z = e^w$$

将此式写成与实函数时同样的形式

$$w = \log z \quad (7.50)$$

以 $z = re^{i\theta}$ 极坐标形式来代入, 如果作与实数时的对数计算相同的计算, 就有

$$w = \log z = \log re^{i\theta} = \log r + \log e^{i\theta} = \log r + i\theta \quad (7.51)$$

于是, 复变函数 z 的对数函数由式(7.50)定义为

$$w = \log z = \log r + i\theta = \log |z| + i \arg z \quad (7.52)$$

这些作为特别的情况, 包含实数的对数(在 $z = x + iy$ 中 $y = 0$ 时)。把直角坐标和极坐标的关系

$$\left. \begin{aligned} x &= r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta \\ r &= \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \arctan \frac{y}{x} \end{aligned} \right\} \quad (7.53)$$

代入式(7.52), 得

$$w = \log z = \log \sqrt{x^2 + y^2} + i \arctan \frac{y}{x} = \frac{1}{2} \log (x^2 + y^2) + i \arctan \frac{y}{x} \quad (7.54)$$

因此, 对数函数 $\log z$ 的实部和虚部

$$\left. \begin{aligned} u &= \log r = \frac{1}{2} \log (x^2 + y^2) \\ v &= \theta = \arctan \frac{y}{x} \end{aligned} \right\} \quad (7.55)$$

[问 7.12] 试确定式(7.55)的 u, v 在 $x = y = 0$ 以外的点 (x, y) 满足柯西-黎曼的微分方程式。

[问 7.13] 试确定式(7.47), 式(7.49), 式(7.55)的 u, v 满足拉普拉斯方程。但是在式(7.55)中不存在 $x=y=0$ 。

根据式(7.48), 对于任意的整数 n , 有

$$e^{i\theta} = e^{i\theta + 2n\pi i}$$

代入式(7.51)

$$w = \log z = \log r + i\theta + 2n\pi i \quad (7.56)$$

即 $\log z$ 在式(7.56)中设 $n=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$, 得到各个 z , 但是对于一组的 r, θ, w 为无数的值(这个值的周期为 $2\pi i$), 因此, 对数函数是无穷多值函数(infinitely many-valued function)。

7.4 复积分

A. 柯西积分定理

考虑在单连通区域 R 中, 解析函数

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

沿这个区域的曲线(图 7.4)的线积分

$$\begin{aligned} F(z) &= \int_{z_0}^z f(z) dz = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \{u(x, y) + iv(x, y)\} (dx + idy) \\ &= \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \{u(x, y) dx - v(x, y) dy\} + i \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \{v(x, y) dx + u(x, y) dy\} \end{aligned} \quad (7.57)$$

如设

$$F(z) \equiv U(x, y) + iV(x, y) \quad (7.58)$$

$$\left. \begin{aligned} U(x, y) &\equiv \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \{u(x, y) dx - v(x, y) dy\} \\ V(x, y) &\equiv \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \{v(x, y) dx + u(x, y) dy\} \end{aligned} \right\} \quad (7.59)$$

$f(z)$ 是解析, 因此, 柯西-黎曼的微分方程式

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

成立,根据式(4.27),式(7.59)右边{ }内是全微分
可以设

$$d\varphi(x, y) = u(x, y)dx - v(x, y)dy$$

$$d\psi(x, y) = v(x, y)dx + u(x, y)dy$$

则

$$\left. \begin{aligned} U(x, y) &= \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} d\varphi(x, y) = \left[\varphi(x, y) \right]_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} = \varphi(x, y) - \varphi(x_0, y_0) \\ V(x, y) &= \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} d\psi(x, y) = \left[\psi(x, y) \right]_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} = \psi(x, y) - \psi(x_0, y_0) \end{aligned} \right\} \quad (7.60)$$

因此,可知 U 和 V 只取决于路径的两端点 $z_0 = x_0 + iy_0, z = x + iy$, 而与路径无关。另外,对式(7.59)的两边用 x, y 偏导数(对 x 求偏导数时, y 固定不变,即代入 $dy=0$,就可以对 x 求导,对 y 求偏导数时也是同样的),得

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y} = u, \quad -\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial x} = v$$

因此,即使对 $F(z) = U + iV$,柯西-黎曼微分方程式也成立,积分 $f(z)$ 而得到的 $F(z)$ 也是解析函数。

特别是在上述的线积分中, (x, y) 和 (x_0, y_0) 一致,积分路径为闭曲线 C ,闭曲线 C 的内部均为 R 点时(图 7.6),式(7.60)右边 $\varphi(x, y)$ 和 $\varphi(x_0, y_0)$ 一致

$$U = V = 0$$

因此将其代入式(7.57),得

$$\oint_C f(z) dz = 0 \quad (7.61)$$

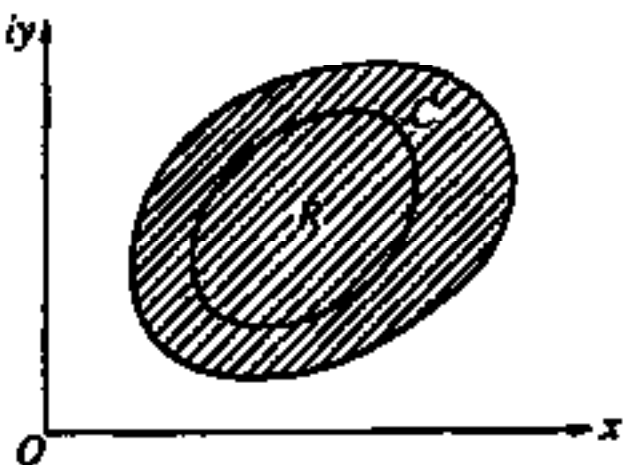


图 7.6 柯西积分定理中的积分路径(斜线内区域 R)

将这称为柯西积分定理(Cauchy's integral theorem)。

[问 7.14] 试表示出根据高斯定理(式(6.68)),将下式右边的线积分变换为二重积分,下式为零时,柯西积分定理(式(7.61))成立。

$$U = \oint_C \{u(x, y)dx - v(x, y)dy\}$$

$$V = \oint_C \{v(x, y)dx + u(x, y)dy\}$$

[提示] $\oint_C f(z) dz = U + iV$

B. 复连通区域问题

将有洞的区域称为^①复连通区域(multiply connected domain)。如图 7.7(a)所示,将三个闭曲线 C_1, C_2, C_3 作为边界的区域 R 的情况,同图(b)那样沿适当的沟割开区域,成为单连通区域,如在这个边界中适用式(7.61),就得沿沟的往返积分相互抵消

$$\oint_{C_1} f(z) dz + \oint_{C_2} f(z) dz + \oint_{C_3} f(z) dz = 0$$

或

$$\oint_{C_1} f(z) dz = \oint_{C_2} -f(z) dz + \oint_{C_3} -f(z) dz \quad (7.62)$$

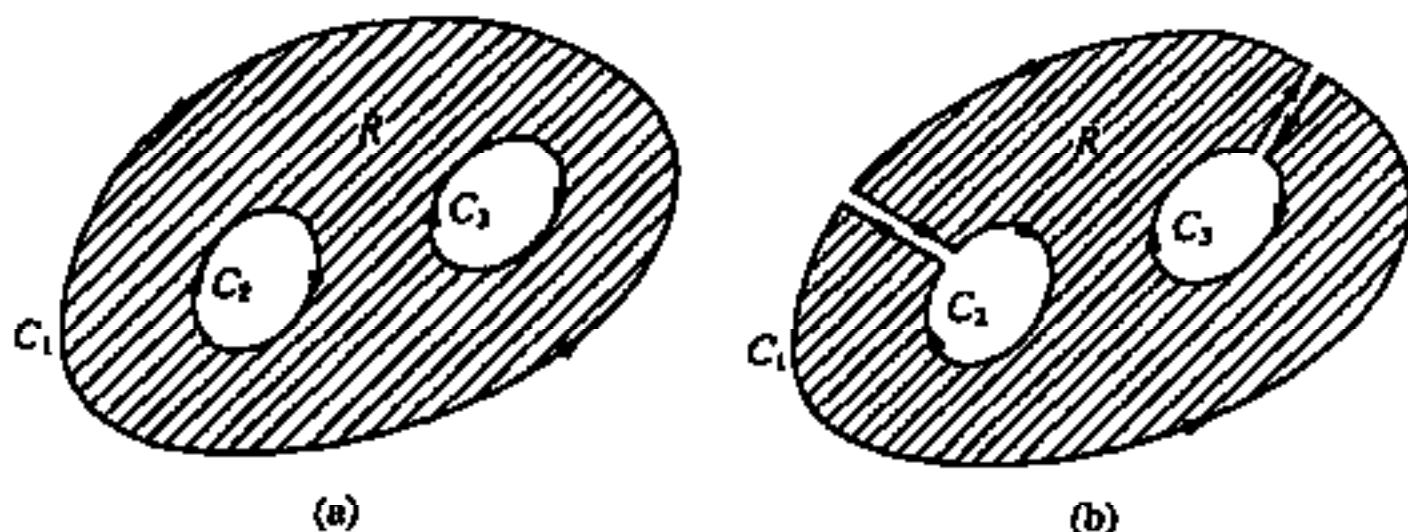


图 7.7 将多重复连通区域变换成单连通区域

C. 柯西的积分表达式

在将边界为 C 的区域 R 中, $f(z)$ 为解析。如将 R 内的一点设为 z_0 来研究复变函数 $f(z)/(z-z_0)$, 而这个函数在 $z=z_0$ 上不解析, 所以如考虑以 z_0 为中心的任意小半径 ρ 的圆 C_ρ , 则对于 C 和 C_ρ 间的区域是 $z-z_0 \neq 0$, 因此 $f(z)/(z-z_0)$ 是解析的, 与式(7.62)相同

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0} dz = \oint_{C_\rho} \frac{f(z)}{z-z_0} dz \quad (7.63)$$

成立。在圆 C_ρ 上, 设 $z-z_0 = \rho e^{i\theta}$, $dz = \rho e^{i\theta} i d\theta$, $dz/(z-z_0) = i d\theta$, 则上式为

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0} dz = \int_0^{2\pi} f(z_0 + \rho e^{i\theta}) i d\theta \quad (7.64)$$

^① 进一步严密地说明的话, 研究对于在区域 R 内的一切闭曲线, 如其内部由一切 R 上的点组成, R 是单连通区域, 否则 R 是复连通区域。

在此,如设

$$f(z_0 + \rho e^{i\theta}) = f(z_0) + \eta \quad (7.65)$$

则对于 $\rho \rightarrow 0$, 为 $\eta \rightarrow 0$ 。将式(7.65)代入式(7.64), 设 $\rho \rightarrow 0$, 则

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \int_0^{2\pi} f(z_0) i d\theta = 2\pi i f(z_0)$$

所以

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

在此式中 z_0 是 R 内的点, z 是边界上的点。如在此式中, 将 z_0 换成 z , 把 z 换成 ζ , 则得

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad (7.66)$$

将这称为柯西的积分表达式(Cauchy's integral representation)。此式是给出用区域边界上的解析函数值, 求区域内任意点的解析函数值的公式。其次, 给出边界上的解析函数值, 在区域内的点上求解析函数的导函数的公式, 是将式(7.66)逐次微分而得^①

$$\left. \begin{aligned} f'(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta \\ f''(z) &= \frac{2!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^3} d\zeta \\ &\dots\dots\dots \\ f^{(n)}(z) &= \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta \end{aligned} \right\} \quad (7.67)$$

由此, $f^{(n)}(z) (n=1, 2, \dots)$ 在区域 R 上是解析的。

7.5 解析函数的泰勒展开

设 $f(z)$ 在区域 R 内解析, a 为 R 内的一点。如画出具有比点 a 和 R 的边界的最短距离还小的半径、点 a 为中心的圆 K , 就如图 7.8 所示, 这个圆 K 包含在 R 内。将 ζ 设为 C 上的点, 把 z 设为圆内的点, 就有 $|z - a| / |\zeta - a| < 1$, 因此

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad f'(z) &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i \Delta z} \oint_C \left\{ \frac{f(\zeta)}{\zeta - (z + \Delta z)} - \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \right\} d\zeta \\ &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z - \Delta z)(\zeta - z)} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta \end{aligned}$$

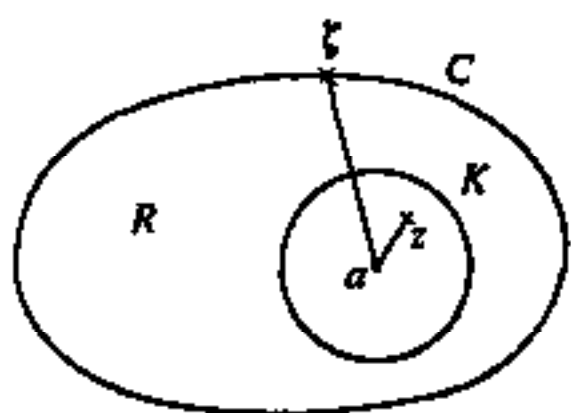


图 7.8 解析函数泰勒展开的说明图

$$\begin{aligned}\frac{1}{\zeta-z} &= \frac{1}{\zeta-a-(z-a)} = \frac{1}{\zeta-a} \frac{1}{1-\frac{z-a}{\zeta-a}} \\ &= \frac{1}{\zeta-a} + \frac{z-a}{(\zeta-a)^2} + \cdots + \frac{(z-a)^n}{(\zeta-a)^{n+1}} + \cdots\end{aligned}\quad (7.68)$$

式(7.68)右边的级数一样收敛,因此,能够在两边乘上 $f(\zeta)/2\pi i$,沿边界 C 逐项圆周积分^①

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta-a)^{n+1}} \quad (7.69)$$

此式的左边用式(7.66)代入,就右边去比较式(7.67)

$$\left. \begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n (z-a)^n \\ A_n &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta-a)^{n+1}} = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \end{aligned} \right\} \quad (7.70)$$

式(7.70)是在 $f(z)$ 解析点 a 上的泰勒级数,这些在以 a 为中心、包含于 R 内部的圆内收敛,但是,对于将这个圆能够扩大的最大圆,在其圆周上存在 $f(z)$ 不解析的点即奇点(singular point)。

7.6 罗朗展开

如图 7.9(a)所示, $f(z)$ 在除点 a 以外圆形区域 R 内解析,将边界圆设为 C 。同图一样,在 R 内取与 a 不同的点 z ,画出以 a 为中心并十分小的圆 K ,使得 z 在 K 的外部。由式(7.66),用和导出式(7.62)时相同的研究方法

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \oint_K \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta \quad (7.71)$$

式(7.71)右边的第一项能够展开成与式(7.69)或式(7.70)相同的级数。在式(7.71)右边第二项中, ζ 是 K 上的点, z 是 K 外的点,因此有

$$\left| \frac{\zeta-a}{z-a} \right| < 1 \quad (7.72)$$

将 $1/(\zeta-z)$ 如下那样展开

① 越:微分积分学要论,学術図書(1979),p. 170~171。

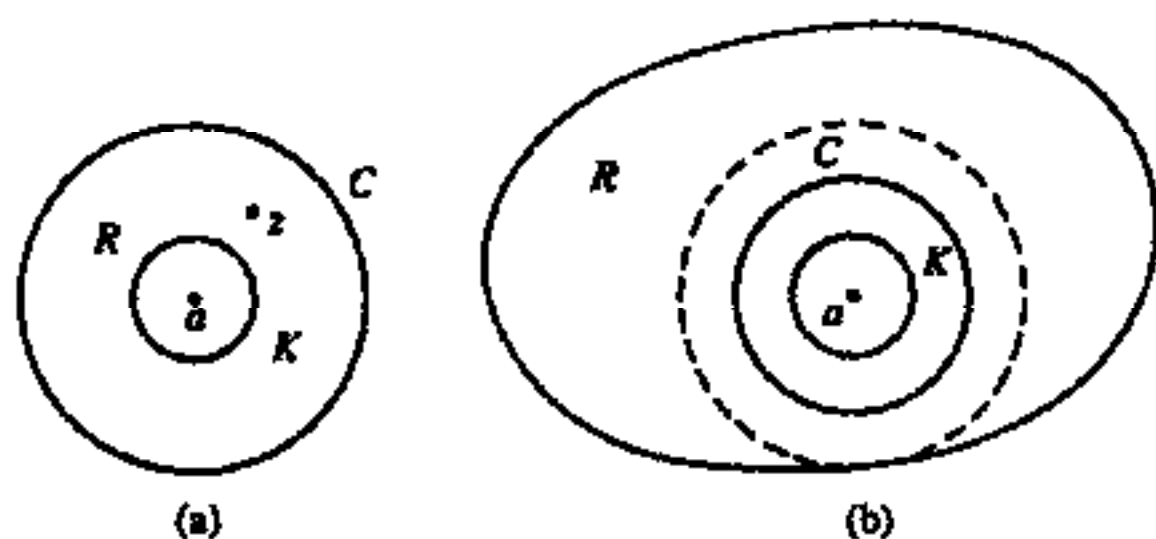


图 7.9 罗朗展开的说明图

$$\begin{aligned} \frac{1}{\zeta-z} &= -\frac{1}{(z-a)-(\zeta-a)} = -\frac{1}{z-a} \frac{1}{1-\frac{\zeta-a}{z-a}} \\ &= -\frac{1}{z-a} \left\{ 1 + \left(\frac{\zeta-a}{z-a} \right) + \left(\frac{\zeta-a}{z-a} \right)^2 + \cdots + \left(\frac{\zeta-a}{z-a} \right)^n + \cdots \right\} \quad (7.73) \end{aligned}$$

把这些代到式(7.71)第2项

$$-\frac{1}{2\pi i} \oint_K \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta = \sum_{n=1}^{\infty} A_{-n} (z-a)^{-n} \quad (7.74)$$

$$\left. \begin{aligned} A_{-n} &= \frac{1}{2\pi i} \oint_K f(\zeta) (\zeta-a)^{n-1} d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(\zeta) (\zeta-a)^{n-1} d\zeta \end{aligned} \right\} \quad (7.75)^{\oplus}$$

如将式(7.71)右边第1项代以式(7.70),将在第2项上代以式(7.74),则

$$\left. \begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n (z-a)^n = \cdots + \frac{A_{-m}}{(z-a)^m} + \cdots + \frac{A_{-1}}{z-a} \\ &\quad + A_0 + A_1 (z-a) + A_2 (z-a)^2 + \cdots + A_n (z-a)^n + \cdots \end{aligned} \right\} \quad (7.76)$$

在此

$$A_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}} d\zeta \quad (n=0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

将式(7.76)称为以 $f(z)$ 的奇点 a 为中心的罗朗展开 (Laurent expansion)。 $f(z)$ 在任意的区域 R 内, 仅有 a 点为奇点时, 即除 a 均解析的时候, 式(7.76)的积分路径的圆 C , 如图 7.9(b) 所示, 可以是以 a 为中心的 R 内任意小的圆。这个情况下, 罗朗展开(7.76)的正整数幂的部分在如图 7.9(b) 中所示, 用虚线表示的、以 a 为中

^① 将 \oint_K 变更为 \oint_C , 可以用与式(7.62)的推导同样的研究方法。

心的 R 内最大的圆中收敛(参照式(7.68), (7.69)), 对 a 点而言, 是解析的。故可以把这个正数幂的部分设为解析函数 $\varphi(z)$ 。对式(7.75), 圆 K 还可以取以 a 为中心的任意小的圆, 在这个圆外, 罗朗展开的负幂部分收敛(式(7.72), 式(7.73)), 因此, 负数幂的部分在 $z=a$ 以外处收敛。把这个负数幂的部分称为主要部分(principal part)。

主要部分为有限多项, 把 $A_{-k} \neq 0, A_{-k-1} = A_{-k-2} = \cdots = 0$ 时的 $z=a$ 称为 $f(z)$ 的 k 级极点(pole of order), 主要部分为无穷多项时的 $z=a$ 称为本性奇点(essential singularity)。

7.7 留数

对上节所述的罗朗展开式(7.76), 在以 $z=a$ 为中心的 R 内小圆周 K 上逐项积分, 就有

$$\oint_K f(z) dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \oint_K (z-a)^n dz \quad (7.77)$$

在此设 $z-a = \rho e^{i\theta}$, $dz = \rho i e^{i\theta} d\theta$, 则有

$$\begin{aligned} \oint_K (z-a)^n dz &= \int_0^{2\pi} \rho^n e^{in\theta} \cdot \rho i e^{i\theta} d\theta = \rho^{n+1} i \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)\theta} d\theta \\ &= \rho^{n+1} i \left\{ \int_0^{2\pi} \cos(n+1)\theta d\theta + i \int_0^{2\pi} \sin(n+1)\theta d\theta \right\} \\ &= \begin{cases} 0 & (n+1 \neq 0 \text{ 而且 } n \neq -1 \text{ 时}) \\ 2\pi i & (n+1=0 \text{ 而且 } n=-1 \text{ 时}^{\text{①}}) \end{cases} \end{aligned} \quad (7.78)$$

将式(7.78)代回(7.77)中, 得

$$\oint_K f(z) dz = 2\pi i A_{-1} \quad (7.79)$$

或

$$A_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_K f(z) dz \quad (7.80)$$

将这个 A_{-1} 称为在奇点 a 的 $f(z)$ 的留数(residue)。

$z=a$ 是 $f(z)$ 的 k 级极点时, 为

$$(z-a)^k f(z) = A_{-k} + A_{-(k-1)}(z-a) + \cdots + A_{-1}(z-a)^{k-1} + \cdots \quad (7.81)$$

而对此式两边进行 $k-1$ 次微分, 为

① 此时 $\rho^{n+1} = \rho^0 = 1$

$$\begin{aligned} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}\{(z-a)^k f(z)\} &= (k-1)! A_{-1} + k(k-1)\cdots 2A_0(z-a) \\ &\quad + (k+1)k(k-1)\cdots 3A_1(z-a)^2 + \cdots \end{aligned} \quad (7.82)$$

在两边, $z \rightarrow a$, 为

$$A_{-1} = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \{(z-a)^k f(z)\} \quad (7.83)$$

特别地 $k=1$ 时, 为

$$A_{-1} = \lim_{z \rightarrow a} (z-a) f(z) \quad (7.84)$$

若在用闭曲线 C 围起来的区域 R 内, $f(z)$ 除有限个奇点 a_1, a_2, \dots, a_n 外解析^①, 则如图 7.10 所示, 把这些奇点用小圆 K_1, K_2, \dots, K_n 围起来, 由式(7.62)

$$\oint_C f(z) dz = \sum_{j=1}^n \int_{K_j} f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^n B_j \quad (7.85)$$

但 B_j 是 $f(z)$ 在 $z=a_j$ 处的留数。

[例 7.8] 试计算 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}}$ 。

[解] 将被积函数的变量 x 作为复变函数 \bar{x} 的函数 $f(z) = \frac{1}{(1+z^2)^{n+1}}$, 如将图 7.11 的半圆的半径 R 取适当大, 则可使其除了仅有一个奇点之外均为解析。 $z=i$ 是 $(n+1)$ 级极点, 其留数由式(7.83)得

$$\begin{aligned} A_{-1} &= \frac{1}{n!} \left\{ \frac{d^n}{dz^n} \frac{(z-i)^{n+1}}{(1+z^2)^{n+1}} \right\}_{z=i} = \frac{1}{n!} \left\{ \frac{d^n}{dz^n} (z+i)^{-(n+1)} \right\}_{z=i} \\ &= \frac{1}{n!} \{ -(n+1) \} \{ -(n+2) \} \cdots \{ -2n \} \{ (z+i)^{-(n+1)} \}_{z=i} \\ &= \left\{ \frac{(-1)^n}{n!} (n+1)(n+2)\cdots 2n (z+i)^{-(2n+1)} \right\}_{z=i} \\ &= \frac{(-1)^n}{n!} (n+1)(n+2)\cdots 2n (2i)^{-(2n+1)} \\ &= \frac{(-1)^n (2n)!}{(n!)^2} \frac{1}{2^{2n} i^{2n}} \frac{1}{2i} = \frac{(-1)^n (2n)!}{(n!)^2} \frac{1}{2^{2n} (-1)^n} \frac{1}{2i} \end{aligned}$$

① 把这样的奇点称为孤立奇点(isolated singularity)。

$$= \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \cdot \frac{1}{2i} \quad (a)$$

接着,沿图 7.11 的半圆的一周积分,由式(7.85)和上式(a)得

$$\oint_{ACBA} f(z) dz = 2\pi i A_{-1} = \frac{\pi(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \quad (b)$$

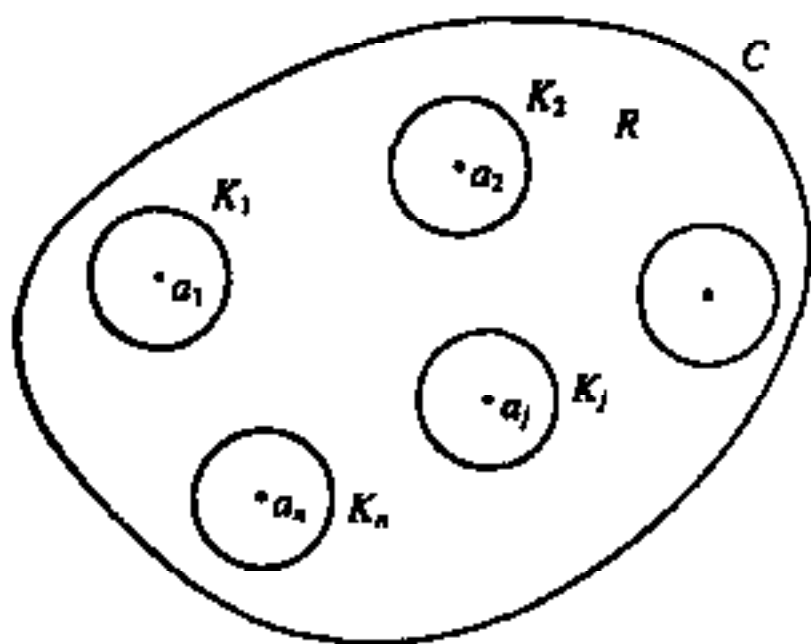


图 7.10 关于留数的定理的说明图

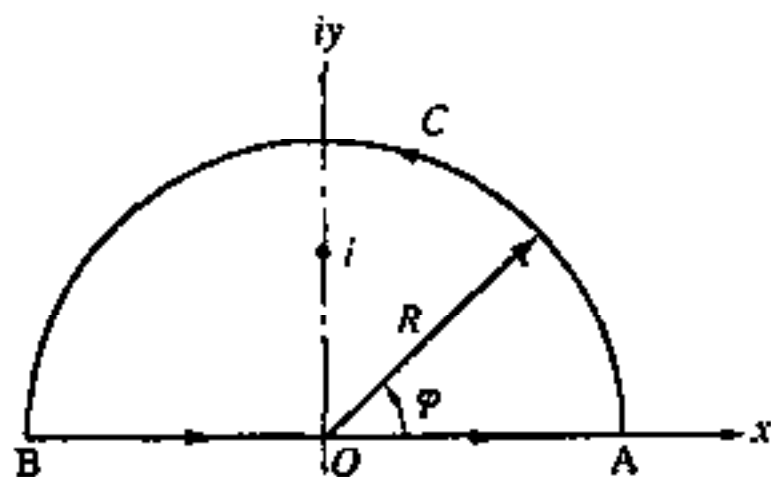


图 7.11 留数在实定积分方面的应用例子

把这式的左边分为直径 BA 上的积分和半圆 ACB 上的积分,可以写成

$$\text{左边} = \int_{-R}^R \frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}} + \int_{ACB} \frac{dz}{(1+z^2)^{n+1}} \quad (c)$$

对于半圆 ACB,

$$\begin{aligned} 1+z^2 &= 1+(Re^{i\varphi})^2 = 1+R^2 e^{2i\varphi} = 1+R^2 (\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi) \\ &= (1+R^2 \cos 2\varphi) + iR^2 \sin 2\varphi \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} |1+z^2| &= \sqrt{(1+R^2 \cos 2\varphi)^2 + R^4 \sin^2 2\varphi} \\ &= \sqrt{1+2R^2 \cos 2\varphi + R^4} \geq R^2 - 1 \end{aligned}$$

在此,等号发生于 $\varphi = \frac{\pi}{2}$ 时。因此,式(c)右边第 2 项的绝对值为

$$\left| \int_{ACB} \frac{dz}{(1+z^2)^{n+1}} \right| \leq \int_{ACB} \frac{dz}{|1+z^2|^{n+1}} \leq \frac{\pi R}{R^2-1} \quad (d)$$

接着,若设 $R \rightarrow \infty$,则式(d)的右边收敛于 0,即

$$\int_{ACB} \frac{dz}{(1+z^2)^{n+1}} \rightarrow 0 \quad (e)$$

从而,对式(c),作为 $R \rightarrow \infty$ 的式,用式(e)代入,并用式(b)作为 $R \rightarrow \infty$ 的式代入左边,

为

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}} = \frac{\pi}{2^{2n}} \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \pi \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}$$

7.8 保角映射及在流体力学方面的应用

在区域 R 中, 对于解析函数 $w=f(z)$, 将对应 z 的增量 Δz 的 w 的增量设为 Δw , 当 $|\Delta z|$ 足够小时, 并设对点 $z_0, f'(z_0) \neq 0$, 则

$$\Delta w \approx f'(z_0) \Delta z \quad (7.86)$$

现在, 在一个复平面(将这称为 z 平面(z -plane))上取独立变量 z , 在另一个复平面(将这称为 w 平面(w -plane))上取相应的变量 w , 并图示出来。如图 7.12(a) 所示, 研究通过 z 平面上 z_0 的两个曲线 C_1, C_2 , 把此曲线上的 z 代入到 $w=f(z)$ 中, 将连接求得的 w 而得 w 面上的曲线 (C_1, C_2 的映射), 同图(b)所示, 设为 K_1, K_2 。将对应 z_0 的 w 平面上的点设为 w_0 。将与 C_1, C_2 上的 z_0 非常接近的点设为 z_1, z_2 , 将 K_1, K_2 上对应的点设为 w_1, w_2 , 根据图 7.12 和式(7.86)有:

$$\Delta w_1 \approx f'(z_0) \Delta z_1, \quad \Delta w_2 \approx f'(z_0) \Delta z_2 \quad (7.87)$$

但是,

$$\left. \begin{aligned} \Delta z_1 &= z_1 - z_0, & \Delta z_2 &= z_2 - z_0 \\ \Delta w_1 &= w_1 - w_0, & \Delta w_2 &= w_2 - w_0 \end{aligned} \right\}$$

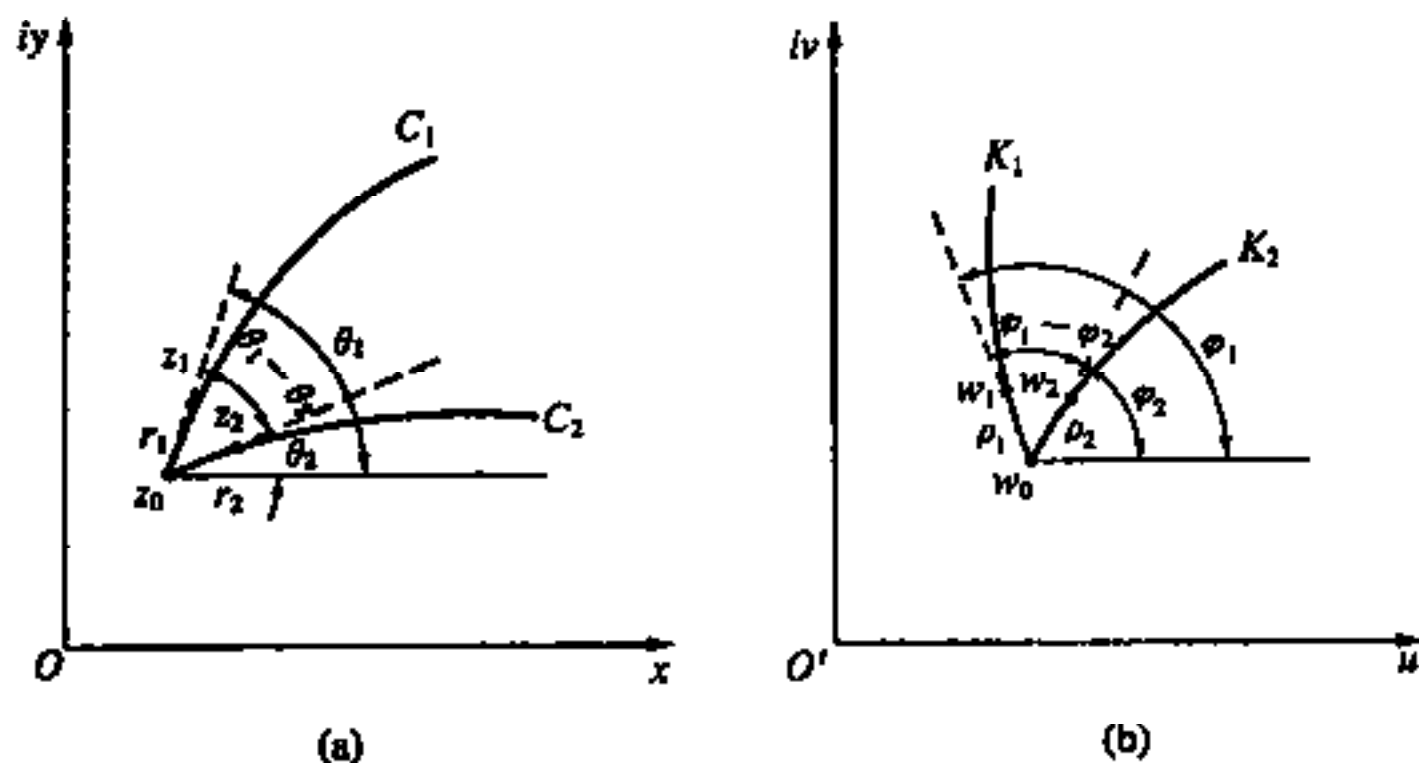


图 7.12 保角映射 ($\theta_1 - \theta_2 = \varphi_1 - \varphi_2$)

在此, 设

$$\Delta z_1 = r_1 e^{i\theta_1}, \quad \Delta z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$$

$$\Delta w_1 = \rho_1 e^{i\varphi_1}, \quad \Delta w_2 = \rho_2 e^{i\varphi_2}$$

而 $r_1, r_2, \rho_1, \rho_2, \theta_1, \theta_2, \varphi_1, \varphi_2$ 是如图 7.12 所示的长度和角度。从 (7.87) 的两个式中消去 $f'(z_0)$, 即

$$\frac{\Delta w_1}{\Delta w_2} = \frac{\Delta z_1}{\Delta z_2}$$

所以

$$\frac{\rho_1 e^{i\varphi_1}}{\rho_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}}$$

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$$

如取两边的绝对值

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{r_1}{r_2} \quad (7.88)$$

如取两边的偏角^①

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \theta_1 - \theta_2 \quad (7.89)$$

根据式 (7.88), $\Delta z_0 z_1 z_2$ 和 $\Delta w_0 w_1 w_2$ 的对应两边成比例, 根据式 (7.89), 两三角形上述两边间的角相等。即为

$$\angle z_2 z_0 z_1 = \angle w_2 w_0 w_1 \quad (7.90)$$

因此有^②

$$\Delta z_0 z_1 z_2 \sim \Delta w_0 w_1 w_2 \quad (7.91)$$

而且, 由于式 (7.89) 两边的符号一致, 如 $\theta_1 \leq \theta_2$, 则 $\varphi_1 \leq \varphi_2$, 在 z 平面的点 z_0 , 从由 C_1 引出的切线转到由 C_2 引出的切线的方向与在 w 平面的点 w_0 , 从由 K_1 引出的切线转到由 K_2 引出的切线的方向一致。

以上即使考虑 $z_1, z_2 \rightarrow z_0$ 即 $\Delta z_1, \Delta z_2 \rightarrow 0$ 的极限, 从 z 平面到 w 平面, 曲线的夹角不仅等角地被映射, 而且按一定的比例扩大 ($|f'(z_0)| > 1$ 时) 或缩小 ($|f'(z_0)| < 1$ 时)^③。具有以上性质的变换称为保角映射 (conformal mapping)。

接下去阐述在流体二元稳定无旋保角映射的应用。

① 一般地是 $\varphi_1 - \varphi_2 = \theta_1 - \theta_2 + 2n\pi$, 但是, 由于 n 是任意的, 所以取 $n=0$ 。

② “ \sim ”表示为相似。

③ $|f'(z_0)| = 1$ 时当然被等大地映射。

根据稳定的条件,式(6.59)为零,进一步地根据二元流, w 也为零,即

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (7.92)$$

这是二元稳定流的连续方程(equation of continuity)。

其次,根据无旋的条件,是 $\text{rot}V=0$,由于是二元问题,仅考虑式(6.64)中 k 部分(u, v, w 中,只考虑没有 w 的部分),为

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad (7.93)$$

式(7.93)是在式(4.27)中阐明的全微分的条件

$$d\varphi = udx + vdy$$

可得到 φ 。因此,考虑各 $y=\text{常数}$,即 $dy=0$ 的情况及 $x=\text{常数}$, $dx=0$ 的情况,得

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad (7.94)$$

将函数 $\varphi(x, y)$ 称为速度势(velocity potential)。

一方面,式(7.92)对于

$$-vdx + udy$$

是全微分的条件,如将此全微分设为 $d\psi$, $x=\text{常数}$,即 $dx=0$ 和 $y=\text{常数}$,即 $dy=0$ 的时,为

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (7.95)$$

把函数 $\psi(x, y)$ 称为流函数(stream function)。

由式(7.94),式(7.95),若消去 u, v ,就可知 φ, ψ 满足柯西-黎曼的微分方程式

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (7.96)$$

所以,根据这些, φ, ψ 满足拉普拉斯方程式

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \quad (7.97)$$

可知 φ, ψ 相互成为共轭调和函数。

由以上建立

$$w(z) \equiv \varphi(x, y) + i\psi(x, y) \quad (7.98)$$

则 $w(z)$ 是解析函数。回想式(7.28), (7.30), 用式(7.94), (7.95), 得

$$w'(z) = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} = -i \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial y} = u - iv \quad (7.99)$$

如作两边的共轭复数, 则

$$u + iv = \overline{w'(z)} \quad (7.100)$$

把这个 $w(z)$ 称为复势。

连接各点的速度矢的曲线即流线(stream line)在 z 面(x, y 面)满足

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v}{u} \quad (7.101)$$

因此

$$vdx - udy = 0 \quad (7.102)$$

故

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = 0 \quad (7.103)$$

从而得

$$d\psi = 0 \quad (7.104)$$

$$\psi = C \text{ (常数)} \quad (7.105)$$

给这个 C 以各种的值, 可得流体的速度场中的各种流线。
为此, 得

$$\varphi = C' \text{ (常数)} \quad (7.106)$$

将所得的线称为等势线(equi-potential)。微分式(7.106)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy = 0$$

所以

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial \varphi / \partial x}{\partial \varphi / \partial y} \equiv m_1 \quad (7.107)$$

这是在等势线上的一点引出等势线的切线的梯度。由式(7.103)可得

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial \psi / \partial x}{\partial \psi / \partial y} \equiv m_2 \quad (7.108)$$

这是在流线上的一点引出流线的切线的梯度。

故对于通过同一点的等势线和流线切线的梯度之间,根据式(7.96),可知有如下关系

$$m_1 m_2 = \frac{(\partial\varphi/\partial x)(\partial\psi/\partial x)}{(\partial\varphi/\partial y)(\partial\psi/\partial y)} = \frac{-(\partial\varphi/\partial x)(\partial\varphi/\partial y)}{(\partial\varphi/\partial y)(\partial\varphi/\partial x)} = -1 \quad (7.109)$$

故通过同一点的等势线和流线正交,对等势线族和流线族形成正交曲线族(orthogonal trajectory)的网格。

[例 7.9] 复势为

$$w(z) = A \log z$$

时,为哪种流? 设 A 为非零实数。

[解] 如设 $z = re^{i\theta}$, 则

$$w(z) = A \log r + A\theta i$$

从而

$$\varphi = A \log r \quad \psi = A\theta$$

故流线是通过原点的直线族,等势线是以原点 O 为中心的同心圆族。图 7.13(a) 表示这情况的流线和等势线时,这些是 z 平面上的曲线。这些曲线向 w 平面上的变换为图(b),可知同图(a)的极坐标网等角变换为同图(b)的长方形坐标网。此外 $A > 0$ 时, O 是流体的源(source), $A < 0$ 时, O 是漏点(sink)。

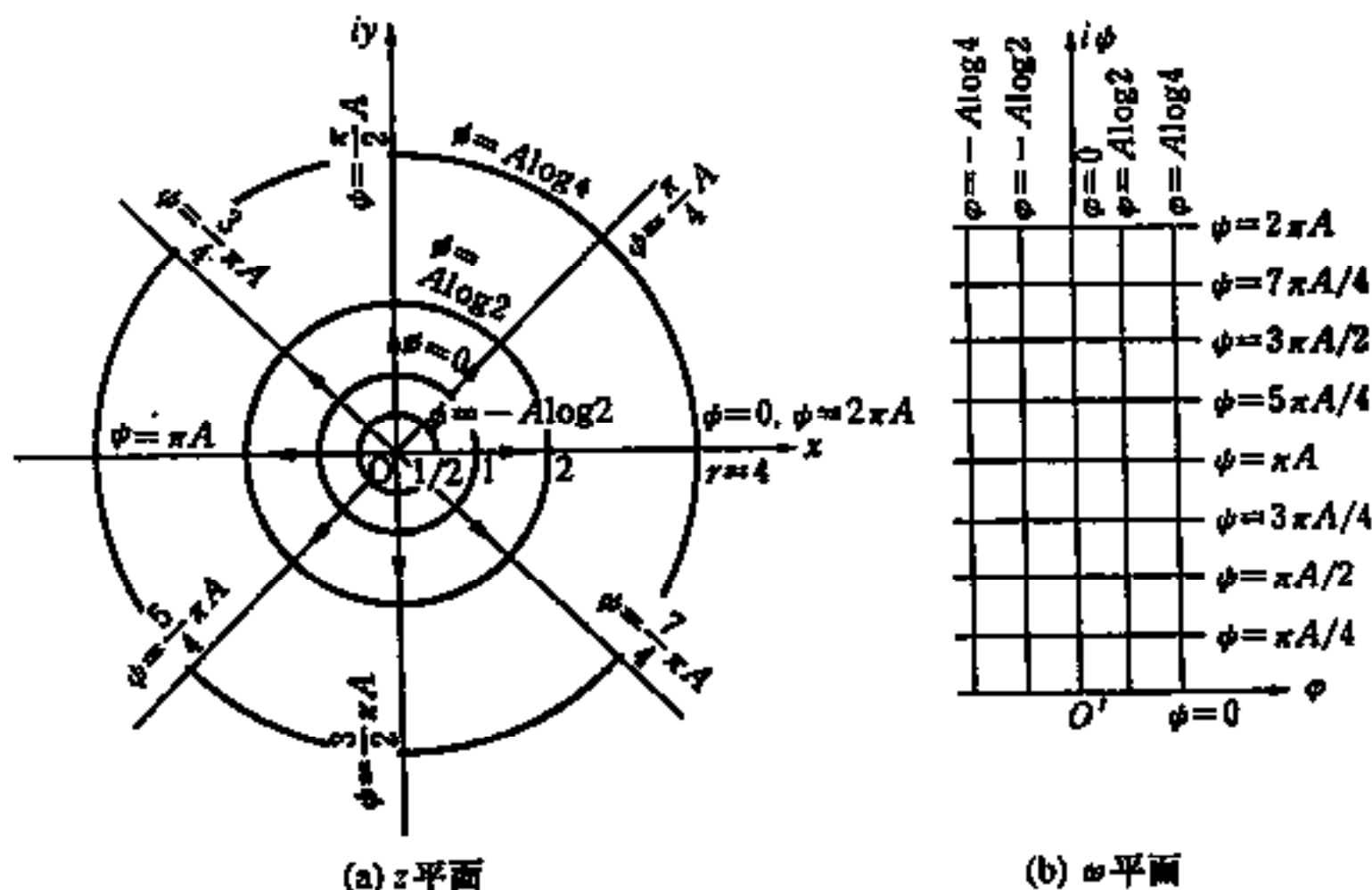


图 7.13 由 z 平面的原点为源头的流和其向 w 平面的保角映射

[问 7.15] 试求在例 7.9 中,从 O 的单位时间平均涌出的量。

[问 7.16] A 为非零实数时,下列的复势,给出的是哪种流。

$$(a) \omega(z) = iA \log z$$

$$(b) \omega(z) = A \log \frac{z-a}{z+a}$$

习题 7

7.1 试将下式换成 $a+ib$ (a, b 是实数) 的形式。

$$(a) (3+i)^3 \quad (b) \frac{2-i}{2+i} \quad (c) (2-i)^4 \quad (d) 4(3+i)(2-i)$$

7.2 试将 () 内表示为指数函数的极坐标形式 $re^{i\theta}$, 试计算下列式

$$(a) (1+i)^8 \quad (b) (1+i)^{3/4}$$

7.3 试用棣莫佛定理和二项式定理证明下列式:

$$(a) \cos n\theta = \cos^n \theta + C_n^2 \cos^{n-2} \theta \sin^2 \theta + C_n^4 \cos^{n-4} \theta \sin^4 \theta + \dots$$

$$(b) \sin n\theta = C_n^1 \cos^{n-1} \theta \sin \theta - C_n^3 \cos^{n-3} \theta \sin^3 \theta + C_n^5 \cos^{n-5} \theta \sin^5 \theta - \dots$$

[提示] 二项式定理 (binomial theorem)

$$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \dots + C_n^r a^{n-r} b^r + \dots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + b^n$$

$$C_n^r = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

7.4 试用式 (7.41) 和二项式定理证明下列式

$$(a) 2^{n-1} \cos^n \theta = \cos n\theta + n \cos(n-2)\theta + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cos(n-4)\theta + \dots$$

$$+ \frac{n(n-1)\dots(n-r+1)}{r!} \cos(n-2r)\theta + \dots \quad (n \text{ 为正整数})$$

$$(b) 2^{n-1} (-1)^{n/2} \sin^n \theta = \cos n\theta - n \cos(n-2)\theta + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cos(n-4)\theta - \dots$$

$$- (-1)^{n-r} \frac{n(n-1)\dots(n-r+1)}{r!} \cos(n-2r)\theta$$

$$+ \dots + (-1)^{n/2} \left\{ \frac{n(n-1)\dots\left(\frac{n}{2}+1\right)}{2 \cdot (n/2)!} \right\} \quad (n \text{ 为正的偶数})$$

$$(c) 2^{n-1} (-1)^{(n-1)/2} \sin^n \theta = \sin n\theta - n \sin(n-2)\theta + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \sin(n-4)\theta$$

$$- \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \sin(n-6)\theta + \dots$$

$$+ (-1)^{(n-1)/2} \frac{n(n-1)(n-2)\dots\frac{1}{2}(n+3)}{\left\{ \frac{1}{2}(n-1) \right\}!} \sin \theta \quad (n \text{ 为正的奇数})$$

7.5 试用柯西-黎曼的微分方程式,证明在区域 R 的一切点上,取实数值的解析函数实际上不过是常数.

7.6 对解析函数 $f(z)$,试证明下式

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) |f(z)|^2 = 4 |f'(z)|^2$$

7.7 $\varphi(z), \psi(z)$ 为解析函数.

(a) 设 $U(x, y) \equiv \varphi(x) + \overline{\varphi(z)}$ 时,试证明为 $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$

(b) 设 $V(x, y) \equiv z \overline{\varphi(z)} + \overline{z} \varphi(z) + \psi(z) + \overline{\psi(z)}$ 时,试证明^①

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right) = 0$$

7.8 当 $w = u + iv, z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ 时,试证明柯西-黎曼方程式为

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} = -\frac{\partial v}{\partial r}$$

7.9 当解析函数 $f(z) = u + iv$ 的实部 u 如下列式那样给定时,试确定这些 u 是调和函数,并求虚部 v .

(a) $u = x^3 - 3xy^2 + 3x^2 - 3y^2 + 1$

(b) $u = x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + y \frac{\partial \varphi}{\partial y}$ (φ = 调和函数)

[提示] 分解 $v = \int_{(0,0)}^{(x,y)} \left(-\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy\right) = \int_{(0,0)}^{(x,0)} + \int_{(x,0)}^{(x,y)}$

在第1项积分时,设 $dy=0$,在第2项积分时,设 $dx=0$. 在积分过程中,及时地代入积分区间. 并采用 $\partial^2 \varphi / \partial x^2 + \partial^2 \varphi / \partial y^2 = 0$.

7.10 在 z 平面上的单连通区域 R ,根据解析函数 $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$,当把包含于 R 内部的任意曲线映射到 w 平面上时,试证明其映射的曲线长度由

$$\int_c \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2} |dz|$$

给出.

[提示] $|f'(z)| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2}$

将这称为映像放大率(magnification ratio of mapping).

^① 在此, V 的满足的式,作为 $\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, 是 $\nabla^4 V = 0$, 是在练习 4.11 中叙述的重调和方程式. 用在此的 φ, ψ 表示的 $V(x, y)$; 被称为重调和方程的古莎的一般解(Goursat's general solution). 在弹性平板的力学中是必要的公式.

7.11 在 z 平面上的单连通区域 R , 根据解析函数 $w=f(z)$, 当把 R 映射到 w 平面上的区域 R_w 时, 试证明 R_w 的面积由

$$\iint_R \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} dx dy$$

给出。

[提示] 有 $|f'(z)|^2 = \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}$ (在上题的提示中, 代入柯西-黎曼微分方程式)。

7.12 在柯西的积分表示式(7.66)中, 将 C 作为以 $z=0$ 为中心、半径为 R 的圆。将圆内一点 z 设为 $re^{i\varphi}$, 将圆周上的动点 ζ 设为 $Re^{i\theta}$ 。

(a) 将这 z, ζ 代入柯西积分表示式, 试写出对于 θ 的积分形式。

(b) 设 $r_1 \equiv R^2/r$ 时, 将 $z_1 = r_1 e^{i\varphi}$ 称为圆 C 的 $z = re^{i\varphi}$ 的反演(inversion)。在上问的积分中, 试将 $z = re^{i\varphi}$ 换成 $z_1 = r_1 e^{i\varphi}$, 则这个积分为零, 即为

$$0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(Re^{i\theta}) Re^{i\theta}}{Re^{i\theta} - r_1 e^{i\varphi}} d\theta$$

[提示] 试用柯西的积分定理(式(7.61))(在圆内部, 没有被积函数的奇点)。

(c) 由上问(a)、(b)的积分的差, 导出下式:

$$f(re^{i\varphi}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(Re^{i\theta}) \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(\theta - \varphi) + r^2} d\theta$$

(d) 当 $f(z) = u + iv$ 时, 由取上问的式两边的实部, 推导下式:

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(R, \theta) \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(\theta - \varphi) + r^2} d\theta$$

此式是在半径 R 的圆形区域的边界 C 上的调和函数值给定时, 求此区域内部任意点的调和函数值的公式, 称为泊阿松积分(Poisson's integral)。

(e) 在上问的泊阿松积分中, 特别地当 $r = \varphi = 0$ 时, 试证明此式为高斯的算术平均定理(式(6.77))

$$u(0, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(R, \theta) d\theta$$

(f) 由高斯的算术平均定理, 试证明调和函数的最大值, 最小值只能在区域的边界上取得。

[提示] 运用反证法。

7.13 在如图那样的复连通区域($n+1$ 重连通区域) R 上, 当解析的函数 $f(z)$ 的实部 $u(x, y)$ 为 1 阶调和函数时, 虚部 $v(x, y)$ 未必为 1 阶(例如式(7.55)的 u, v)。那么, 试解释沿图 7.14 的内周边界 C_1, C_2, \dots, C_n 将以逆时针回转一周时的 v 的增量(实数值)为 A_1, A_2, \dots, A_n (不考虑 v 为 1 阶时 $A_1 = A_2 = \dots = A_n$ 的特别情况), 可以表示为

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^n A_k \log(z - z_k) + f^*(z)$$

但是,为 $f^*(z)=z$ 的 1 阶解析函数(holomorphic function), 在 $z_1=z$ 平面中的闭曲线 C_1 内部的任意点。

[提示] v 利用 u , 由式(7.35)给出。右边的积分是从 (x_0, y_0) 到 (x, y) 的线积分, 对于沿如图 7.14 的实线的路径积分时与沿同图的虚线积分时, 后者的结果仅比前者多 A_1 。

7.14 试解释从上题的区域内的 z_0 到任意点 z , 沿 R 内的曲线, 线积分上题的函数 $f(z)$, 得到的函数

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(z) dz \quad (a)$$

表示为

$$F(z) = \frac{z}{2\pi} \sum_{k=1}^n A_k \log(z - z_k) + \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^n (a_k + ib_k) \log(z - z_k) + F^*(z) \quad (b)$$

但是

$$a_k + ib_k = \text{复常数}$$

$$F^*(z) = 1 \text{ 阶解析函数}$$

[提示] 进行式(a)的线积分时, 即使被积函数是 1 阶, 积分得到的函数也是多阶(如 $1/z$ 即使是 1 阶, 积分得到的 $\log z$, 对于 $z=0$ 的周围, 为多阶)。从而, 对图 7.14 的实线、虚线的路径, 积分后的结果间, 一般地应该得出某复数值的差。

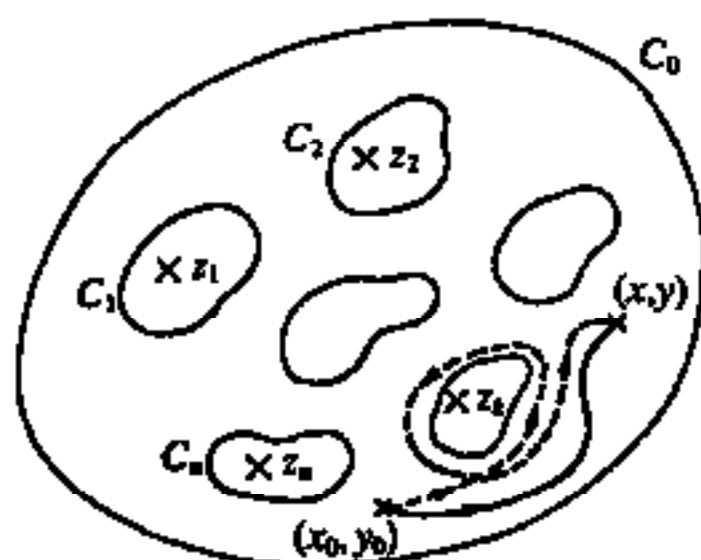


图 7.14

第8章 傅立叶分析

8.1 傅立叶级数

如图 8.1 所示,将周期为 T 的周期函数 $f(x)$,展开^①为如下形式:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2n\pi}{T}x + b_n \sin \frac{2n\pi}{T}x \right) \quad (8.1)$$

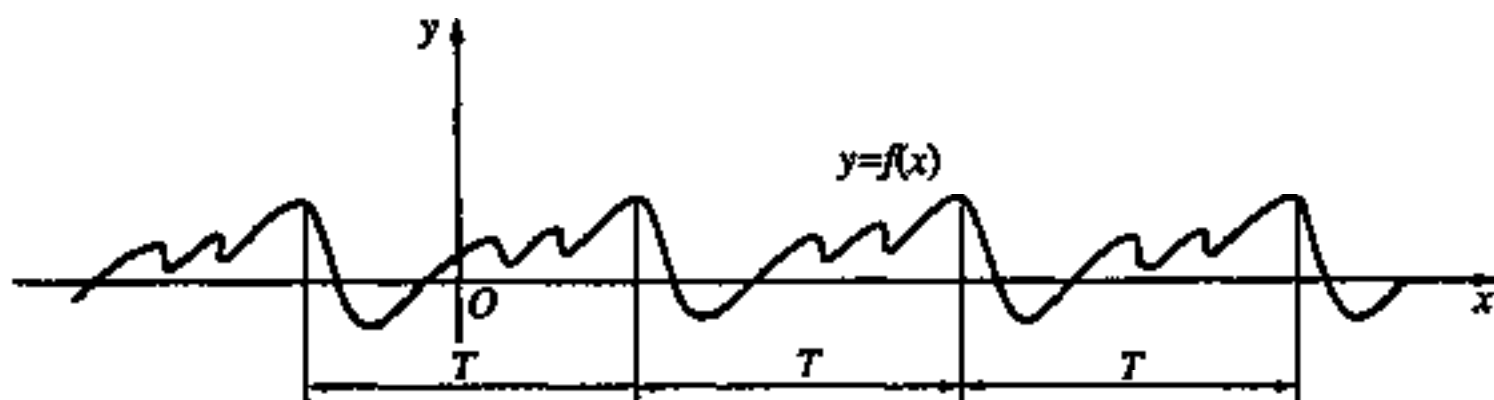


图 8.1 周期为 T 的周期函数

若求系数 $a_0, a_n, b_n (n=1, 2, \dots)$, 取决于式(8.1)的展开式。对于这些, 采用以下的积分公式。

$$\left. \begin{aligned} \int_{-T/2}^{T/2} \cos \frac{2m\pi}{T}x \cos \frac{2n\pi}{T}x dx &= \frac{T}{2} \delta_{mn} \\ \int_{-T/2}^{T/2} \sin \frac{2m\pi}{T}x \sin \frac{2n\pi}{T}x dx &= \frac{T}{2} \delta_{mn} \\ \int_{-T/2}^{T/2} \sin \frac{2m\pi}{T}x \cos \frac{2n\pi}{T}x dx &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (8.2)$$

式中, δ_{mn} 是由下式来定义的克罗内克 δ (Kronecker delta)。

$$\left. \begin{aligned} \delta_{mn} &= 1 \quad (m=n \text{ 时}) \\ \delta_{mn} &= 0 \quad (m \neq n \text{ 时}) \end{aligned} \right\} \quad (8.3)$$

[问 8.1] 试证明式(8.2)

在式(8.1)的两边, 乘以 $\cos(2m\pi x/T) (m=0, 1, 2, \dots)$, 并在 $(-T/2, T/2)$ 上积分, 利用式(8.2), 就得到 a_m 的表达式, 将字母 m 换成 n , 得

^① 在本章叙述的, 是所有形式上的计算。对于收敛性等问题的讨论, 可见相应的定理。

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \cos \frac{2n\pi}{T} x dx \quad (n=0, 1, 2, \dots) \quad (8.4)$$

又, 在式(8.1)的两边乘以 $\sin(2m\pi x/T)$ ($m=1, 2, \dots$), 作以上相同的运算, 得

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \sin \frac{2n\pi}{T} x dx \quad (n=1, 2, \dots) \quad (8.5)$$

由以上两式可确定式(8.1)右边的系数, 从而得到展开式(8.1)。把这个展开式称为傅立叶级数(Fourier series), 由式(8.4), 式(8.5)确定的系数 a_n, b_n 称为傅立叶系数(Fourier coefficient)。

对于傅立叶级数的收敛性, 则以下的定理成立, 但证明略去。

定理 $f(x)$ 是具有周期 T 的周期函数, 对 $f(x), f'(x)$, 可以存在间断点, 但间断点为有限个(将这种情况, 称为分段连续(Piecewise continuous))。此时 $f(x)$ 的傅立叶级数在连续点处收敛于 $f(x)$, 在间断点处, 收敛于

$$\frac{1}{2} \{f(x+0) + f(x-0)\}$$

【例 8.1】 交流电压 $E \sin \omega t$ 通过全波整流器, 现将波的负的部分作正的符号变换后使之变为 $E|\sin \omega t|$, 即如图 8.2 所示的脉冲。试将此函数展开为傅立叶级数。

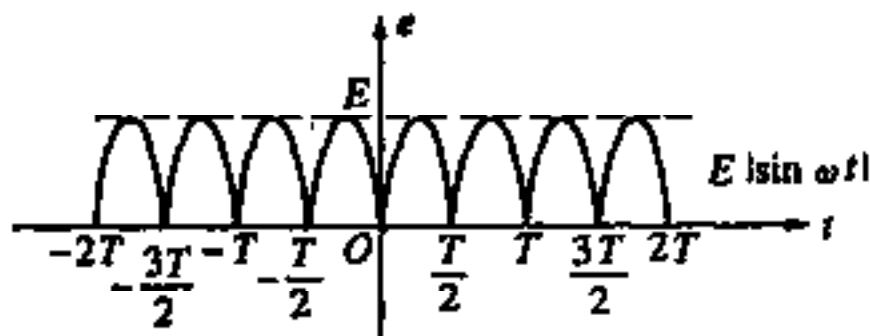


图 8.2 脉冲

【解】 设 $e(t) = E|\sin \omega t|$, 因为 $T = 2\pi/\omega$, 由式(8.4)

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} e(t) \cos \frac{2n\pi t}{T} dt = \frac{4E}{T} \int_0^{T/2} \sin \omega t \cos n\omega t dt \\ &= \frac{2E}{T} \int_0^{T/2} \{\sin \omega(1+n)t + \sin \omega(1-n)t\} dt \\ &= \frac{2E}{T} \left[-\frac{\cos \omega(1+n)t}{\omega(1+n)} - \frac{\cos \omega(1-n)t}{\omega(1-n)} \right]_0^{T/2} \\ &= \frac{E}{\pi} \left\{ -\frac{\cos(1+n)\pi}{1+n} - \frac{\cos(1-n)\pi}{1-n} + \frac{1}{1+n} + \frac{1}{1-n} \right\} \end{aligned}$$

故, n 为奇数时

$$a_n = \frac{E}{\pi} \left(-\frac{1}{1+n} - \frac{1}{1-n} + \frac{1}{1+n} + \frac{1}{1-n} \right) = 0$$

n = 偶数时

$$a_n = \frac{2E}{\pi} \left(\frac{1}{1+n} + \frac{1}{1-n} \right) = \frac{2E}{\pi} \frac{2}{1-n^2} = \frac{4E}{\pi(1-n^2)}$$

$n=0$ 时

$$a_0 = \frac{4E}{\pi}$$

对于系数 b_n , 可得

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} e(t) \sin \frac{2n\pi}{T} t dt = 0$$

因此, 所求的傅立叶级数为

$$e(t) = \frac{2E}{\pi} + \frac{4E}{\pi} \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} \frac{1}{1-n^2} \cos n\omega t = \frac{2E}{\pi} + \frac{4E}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-4n^2} \cos 2n\omega t$$

[问 8.2] 试叙述在例 8.1 中所求得 b_n 的积分为零的理由。

[问 8.3] 如图 8.3 所示, 凸轮的从动件作周期为 1s 的锯齿状的上下运动, 试把函数 $x=x(t)$ 用傅立叶级数来表示。

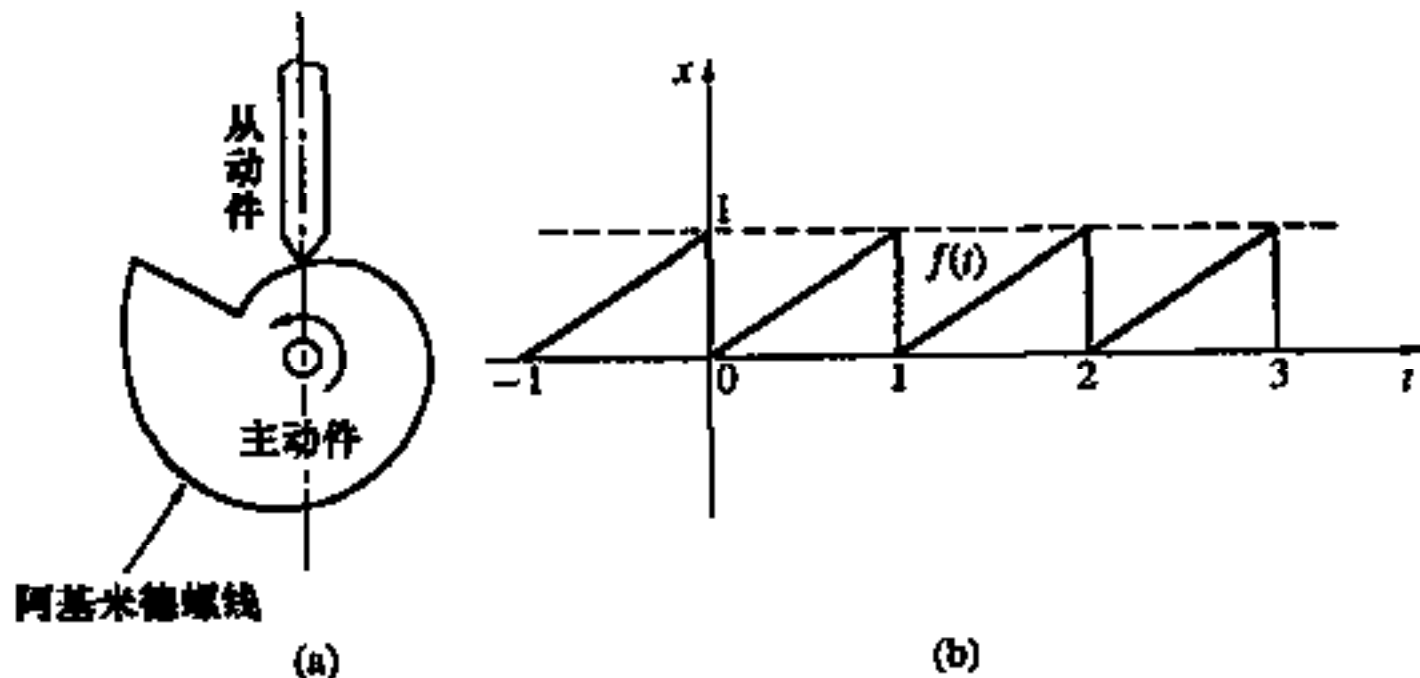


图 8.3 凸轮和其位移

8.2 傅立叶变换

将上节的式(8.4), 式(8.5)代入式(8.1), 则

$$\begin{aligned} f(x) = & \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(\xi) d\xi + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(\xi) \cos \frac{2n\pi}{T} \xi d\xi \cdot \cos \frac{2n\pi x}{T} \right. \\ & \left. + \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(\xi) \sin \frac{2n\pi}{T} \xi d\xi \cdot \sin \frac{2n\pi x}{T} \right] \end{aligned} \quad (8.6)$$

现在如图 8.4 所示, 设 $f(x)$ 是在 $(-\infty, \infty)$ 内定义函数, 如果

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx$$

为有限的,则根据

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx$$

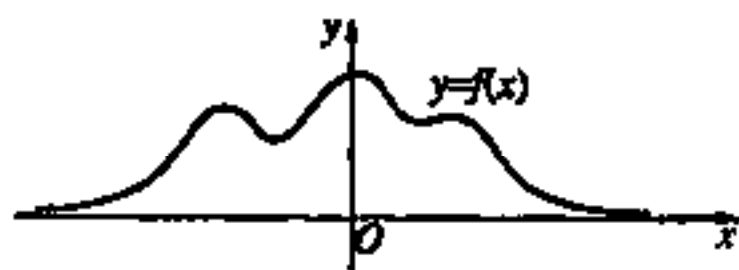


图 8.4 用傅立叶积分来表达的函数

当式(8.6)中 $T \rightarrow \infty$, 则该式右边的第一项消失。现设

$$\Delta\alpha = \frac{2\pi}{T}$$

当 $T \rightarrow \infty$, 则 $\Delta\alpha \rightarrow 0$, 式(8.6)成为

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{\Delta\alpha \rightarrow 0} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Delta\alpha}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \cos(n\Delta\alpha\xi) d\xi \cdot \cos(n\Delta\alpha x) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Delta\alpha}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \sin(n\Delta\alpha\xi) d\xi \cdot \sin(n\Delta\alpha\xi) \right\} \\ &= \lim_{\Delta\alpha \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \cos\{n\Delta\alpha(x-\xi)\} \Delta\alpha d\xi \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} f(\xi) \cos\alpha(x-\xi) d\xi d\alpha \end{aligned} \quad (8.7)$$

或者,将余弦函数用式(7.41)代替,则

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \{e^{i\alpha(\xi-x)} + e^{-i\alpha(\xi-x)}\} d\xi d\alpha \\ &= \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{i\alpha(\xi-x)} d\xi d\alpha + \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{-i\alpha(\xi-x)} d\xi d\alpha \right\} \\ &= \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{-i\alpha(\xi-x)} d\xi d\alpha + \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{-i\alpha(\xi-x)} d\xi d\alpha \right\} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{-i\alpha(\xi-x)} d\xi d\alpha \end{aligned} \quad (8.8)$$

将式(8.7),式(8.8)的右边称为 $f(x)$ 的傅立叶积分(Fourier integral)。对于傅立叶积分,也与傅立叶级数相似的定理成立(证明略)。

定理 $f(x)$ 是在 $(-\infty, \infty)$ 内定义, $f(x), f'(x)$ 是分段连续, 如果 $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx$ 为有限的, 那么, 在 $f(x)$ 的连续点, 傅立叶积分(式(8.7), 式(8.8)右边)等于 $f(x)$,

而在 $f(x)$ 的间断点, 傅立叶积分为

$$\frac{1}{2}\{f(x+0)+f(x-0)\}$$

接着, 若将式(8.8)变为

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{-i\xi\alpha} d\xi \right\} e^{i\alpha x} d\alpha$$

由于右边()内是 α 的函数, 因此, 若将它设为 $F(\alpha)$, 则上式成为以下的两个联立式。

$$F(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{-i\xi\alpha} d\xi \quad (8.9)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha) e^{i\alpha x} d\alpha \quad (8.10)$$

将 $F(\alpha)$ 称为 $f(x)$ 的傅立叶变换(Fourier transform)。式(8.9)是由给定的函数 $f(x)$ 求其傅立叶变换 $F(\alpha)$ 的公式, 式(8.10)相反地是由某函数的傅立叶变换 $F(\alpha)$ 求原函数 $f(x)$ 的逆变换公式(inversion formula)。

[问 8.4] 如 $f(x)$ 为偶函数, 试证明式(8.9), 式(8.10)变为下列的傅立叶余弦变换(Fourier cosine transform)和其逆变换公式。

$$F_c(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(\xi) \cos \alpha \xi d\xi \quad (8.11)$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} F_c(\alpha) \cos \alpha x d\alpha \quad (8.12)$$

[问 8.5] 如 $f(x)$ 为奇函数, 试证明式(8.9), 式(8.10)变为下列的傅立叶正弦变换(Fourier sine transform)和其逆变换公式。

$$F_s(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(\xi) \sin \alpha \xi d\xi \quad (8.13)$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} F_s(\alpha) \sin \alpha x d\alpha \quad (8.14)$$

8.3 拉普拉斯变换

在区域 $(0, \infty)$ 内被定义的函数 $f(t)$, 积分

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt \quad (8.15)$$

为有限时, 将 $F(s)$ 称为 $f(t)$ 的拉普拉斯变换 (Laplace transform), 记为

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) \quad (8.16)$$

[问 8.6] 设 a, b 为常数, $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$, $\mathcal{L}[g(t)] = G(s)$ 试证明

$$\mathcal{L}[af(t) + bg(t)] = aF(s) + bG(s)$$

[例 8.2] 试证明

$$\mathcal{L}[e^{at} f(t)] = F(s-a) \quad (8.18)$$

[解] $\mathcal{L}[e^{at} f(t)] = \int_0^{\infty} e^{at} f(t) e^{-st} dt = \int_0^{\infty} f(t) e^{-(s-a)t} dt = F(s-a)$

[例 8.3] 试求下列拉普拉斯变换。这里设 $\operatorname{Re}(s) > 0$ 。

(a) $\mathcal{L}[1]$ (b) $\mathcal{L}[t]$ (c) $\mathcal{L}[t^2]$ (d) $\mathcal{L}[t^n]$

[解]

$$(a) \mathcal{L}[1] = \int_0^{\infty} e^{-st} dt = -\left[\frac{e^{-st}}{s}\right]_0^{\infty} = \frac{1}{s} \quad (8.19)$$

$$(b) \mathcal{L}[t] = \int_0^{\infty} te^{-st} dt = -\left[-\frac{te^{-st}}{s}\right]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} \frac{e^{-st}}{s} dt = -\left[\frac{e^{-st}}{s^2}\right]_0^{\infty} = \frac{1}{s^2} \quad (8.20)$$

这里

$$\lim_{t \rightarrow \infty} te^{-st} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{e^{st}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{se^{st}} = 0$$

$\left[\begin{array}{l} \text{根据罗必} \\ \text{塔法则, 对} \\ \text{分子分母} \\ \text{分别微分} \end{array} \right]$

$$(c) \mathcal{L}[t^2] = \int_0^{\infty} t^2 e^{-st} dt = \left[-\frac{t^2 e^{-st}}{s}\right]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} \frac{2te^{-st}}{s} dt = \frac{2}{s} \mathcal{L}[t] = \frac{2}{s^3}$$

(d) 以上(a), (b), (c)的结果是 $0!/s$, $1!/s^2$, $2!/s^3$, 故以此类推, 可得

$$\mathcal{L}[t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}} \quad (8.21)$$

[问 8.7] 试根据数学归纳法证明式(8.21)成立。

[例 8.4] 试求下列拉普拉斯变换。这里设 $\operatorname{Re}(s) > a$ 。

(a) $\mathcal{L}[e^{at}]$ (b) $\mathcal{L}[te^{at}]$ (c) $\mathcal{L}[t^n e^{at}]$

[解] 若综合例 8.2, 例 8.3 的结果, 则可解得:

$$(a) \mathcal{L}[e^{at}] = \mathcal{L}[e^{at} \times 1] = \frac{1}{s-a} \quad (8.22)$$

$$(b) \mathcal{L}[te^{at}] = \mathcal{L}[e^{at} \times t] = \frac{1}{(s-a)^2} \quad (8.23)$$

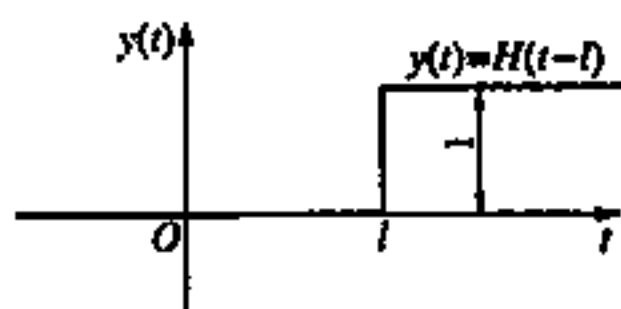
$$(c) \mathcal{L}[t^n e^{at}] = \mathcal{L}[e^{at} \times t^n] = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}} \quad (8.24)$$

[问 8.8] 试求下列拉普拉斯变换。这里设 $\operatorname{Re}(s) > |a|$ 。

$$(a) \mathcal{L}[e^{-at}] \quad (b) \mathcal{L}[\cosh at] \quad (c) \mathcal{L}[\sinh at]$$

[问 8.9] 试求下列拉普拉斯变换。这里设 $\operatorname{Re}(s) > 0$ 。

$$(a) \mathcal{L}[e^{i\omega t}] \quad (b) \mathcal{L}[e^{-i\omega t}] \quad (c) \mathcal{L}[\cos \omega t] \quad (d) \mathcal{L}[\sin \omega t]$$



[例 8.5] 试求电离的单位阶梯函数 (Heaviside unit step function) (图 8.5)

$$H(t-l) = \begin{cases} 0 & (t < l) \\ 1 & (t > l) \end{cases}$$

图 8.5 电离的单位阶梯函数的拉普拉斯变换。这里设 $\operatorname{Re}(s) > 0$ 。

$$\begin{aligned} [\text{解}] \quad \mathcal{L}[H(t-l)] &= \int_0^{\infty} H(t-l) e^{-st} dt \\ &= \int_0^l H(t-l) e^{-st} dt + \int_l^{\infty} H(t-l) e^{-st} dt \\ &= \int_0^l 0 \cdot e^{-st} dt + \int_l^{\infty} 1 \cdot e^{-st} dt \\ &= \int_l^{\infty} e^{-st} dt = \left[-\frac{e^{-st}}{s} \right]_l^{\infty} = \frac{e^{-sl}}{s} \end{aligned} \quad (8.25)$$

特别地, $l=0$ 时, 在式(8.25)中 $l \rightarrow 0$, 为

$$\mathcal{L}[H(t)] = \frac{1}{s} \quad (8.26)$$

这些和例 8.3(a) 的结果一致。图 8.5 是将在 $t=0$ 时的单位阶梯函数(在图 8.5 中 $l=0$ 的情况)的阶梯时刻, 仅延时了 l , 由于延时了 l , 对其拉普拉斯变换, 应乘以 e^{-sl} 因子。

[问 8.10] 试证明在 $t \geq 0$ 时为 $f(x)$, $t < 0$ 时为零的函数, 如图 8.6 所示, 延时至 $t=l$ 后的延时函数(delay function)

$$\left. \begin{aligned} g(t) &= 0 & t < l \\ g(t) &= f(t-l) & t \geq l \end{aligned} \right\} \quad (8.27)$$

的拉普拉斯变换为

$$\mathcal{L}[g(t)] = e^{-st} F(s) \quad (8.28)$$

接着研究导函数的拉普拉斯变换。 $f(t)$ 为连续函数时,对式(8.15)作分部积分,就有

$$F(s) = \left[-\frac{e^{-st}}{s} f(t) \right]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} \frac{e^{-st}}{s} \frac{df(t)}{dt} dt$$

在此,如假定 $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-st} f(t) = 0$, 则上式成为^①

$$F(s) = \frac{f(+0)}{s} + \frac{1}{s} \mathcal{L} \left[\frac{df(t)}{dt} \right]$$

所以,由此式可解出 $\mathcal{L}[df/dt]$, 从而得到导函数的拉普拉斯变换公式

$$\mathcal{L} \left[\frac{df(t)}{dt} \right] = sF(s) - f(+0) \quad (8.29)$$

接下去,假定 $f(t), f'(t)$ 为连续函数,研究 2 阶导函数的拉普拉斯变换。如设

$$\left. \begin{aligned} g(t) &\equiv \frac{df(t)}{dt} \\ \mathcal{L}[g(t)] &\equiv G(s) \end{aligned} \right\} \quad (8.30)$$

在式(8.29)中,用 g, G 代替 f, F

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \left[\frac{dg(t)}{dt} \right] &= sG(s) - g(+0) = s\mathcal{L}[g(t)] - g(+0) \\ &= s\mathcal{L} \left[\frac{df(t)}{dt} \right] - f'(+0) = s\{sF(s) - f(+0)\} - f'(+0) \\ &= s^2 F(s) - sf(+0) - f'(+0) \end{aligned}$$

$$\text{所以} \quad \mathcal{L} \left[\frac{d^2 f(t)}{dt^2} \right] = s^2 F(s) - sf(+0) - f'(+0) \quad (8.31)$$

同理,设 $f(t), f'(t), f''(t), \dots, f^{(n-1)}(t)$ 为连续函数,则得

$$\mathcal{L} \left[\frac{d^n f(t)}{dt^n} \right] = s^n F(s) - s^{n-1} f(+0) - s^{n-2} f'(+0) - \dots - f^{(n-1)}(+0) \quad (8.32)$$

[问 8.11] 试根据数学归纳法,验证式(8.32)。

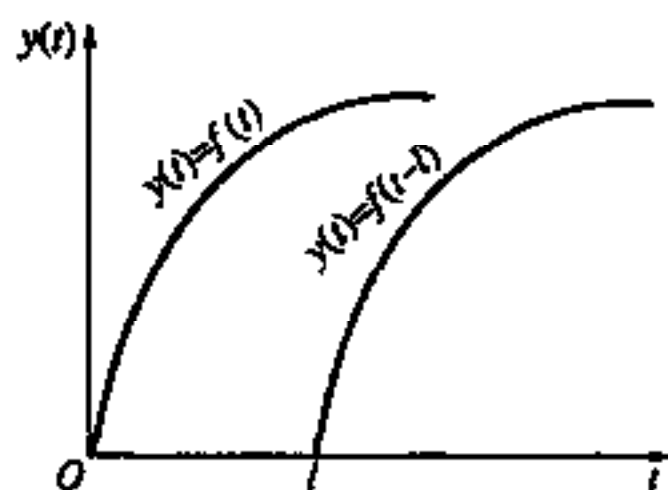


图 8.6 延时函数

^① $f(+0)$ 是在经过时刻 $t=0$ 瞬间的 $f(t)$ 之值。

下面研究 $f(t)$ 的不定积分的拉普拉斯变换。如设

$$\left. \begin{aligned} \varphi(t) &\equiv \int_0^t f(t) dt \\ \frac{d\varphi(t)}{dt} &= f(t) \end{aligned} \right\} \quad (8.33)$$

将式(8.15)的右边分部积分

$$F(s) = \int_0^{\infty} \varphi'(t) e^{-st} dt = [\varphi(t) e^{-st}]_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} \varphi(t) e^{-st} dt$$

在此, 如 $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) e^{-st} = 0$ 成立, $[\varphi(t) e^{-st}]_{t=0} = \varphi(0) = 0$, 则

$$F(s) = s \int_0^{\infty} \varphi(t) e^{-st} dt = s \mathcal{L}[\varphi(t)] = s \mathcal{L}\left[\int_0^t f(t) dt\right]$$

所以
$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t) dt\right] = \frac{F(s)}{s} \quad (8.34)$$

8.4 拉普拉斯逆变换

式(8.15)给出的是拉普拉斯变换公式, 即当 $f(t)$ 已知时, 求其拉普拉斯变换 $F(s)$ 。

本节要阐述相反的情况, 即拉普拉斯变换 $F(s)$ 是已知的, 原函数 $f(t)$ 是未知的情况下, 怎样去求得 $f(t)$ 。这里从 $F(s)$ 求 $f(t)$ 称为拉普拉斯逆变换 (inverse Laplace transform), 对于 $t \geq 0$ ^①, 由

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(s) e^{st} dt \quad (8.35)$$

给出。有关上式最右边的公式的推导和其应用省略^②, 在此, 仅用例题来说明将有理函数分解为部分分式的方法。

[例 8.6] 试求 $F(s) = \frac{s-1}{(s+4)(s-2)}$ 的 $\mathcal{L}^{-1}[F(s)]$

[解] 将 $F(s)$ 分解为部分分式。设

$$F(s) = \frac{s-1}{(s+4)(s-2)} = \frac{A}{s+4} + \frac{B}{s-2} \quad (a)$$

① $F(s)$ 的拉普拉斯逆变换 $f(t)$, 可写成 $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$ 。

② 野木達夫: 基礎工業数学, 朝倉書店(1985), p. 127。

将上式分母通分

$$s-1=A(s-2)+B(s+4) \quad (\text{b})$$

在式(b)的两边,如设 $s=-4$,则

$$-4-1=A(-4-2)$$

所以

$$A=\frac{5}{6} \quad (\text{c})$$

在式(b)的两边,如设 $s=2$,则

$$2-1=B(2+4)$$

所以

$$B=\frac{1}{6} \quad (\text{d})$$

将式(c),式(d)代入式(a)

$$F(s)=\frac{5}{6} \cdot \frac{1}{s+4} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{s-2} \quad (\text{e})$$

在例 8.4 中,如果研究 $a=-4, a=2$ 的情况,则

$$\mathcal{L}[e^{-4t}]=\frac{1}{s+4}, \quad \mathcal{L}[e^{2t}]=\frac{1}{s-2}$$

从而

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+4}\right] &= e^{-4t} \\ \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-2}\right] &= e^{2t} \end{aligned} \right\} \quad (\text{f})$$

因而,在式(e)的拉普拉斯逆变换中,代入式(f)^①

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)]=\frac{5}{6}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+4}\right]+\frac{1}{6}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-2}\right]=\frac{5}{6}e^{-4t}+\frac{1}{6}e^{2t}$$

[例 8.7] 试求 $F(s)=\frac{s-1}{(s-2)^2(s+3)}$ 时的 $\mathcal{L}^{-1}[F(s)]$ 。

[解] 将给出的 $F(s)$ 分解为部分分式。如设

$$\frac{s-1}{(s-2)^2(s+3)}=\frac{A}{s-2}+\frac{B}{(s-2)^2}+\frac{C}{s+3} \quad (\text{a})$$

^① a, b 为常数时,有 $\mathcal{L}^{-1}[aF(s)+bG(s)]=af(t)+bg(t)$ (参照式(8.17))。

将分母通分,则

$$s-1=A(s-2)(s+3)+B(s+3)+C(s-2)^2 \quad (\text{b})$$

首先在两边设 $s=2$, 则

$$2-1=B(2+3), \quad B=\frac{1}{5} \quad (\text{c})$$

如在式(b)的两边设 $s=-3$, 则

$$-3-1=C(-3-2)^2, \quad C=-\frac{4}{25} \quad (\text{d})$$

设式(b)的两边 s^2 的系数相等

$$A+C=0, \quad A=-C=\frac{4}{25} \quad (\text{e})$$

将式(c), (d), (e)代入式(a)

$$\frac{s-1}{(s-2)^2(s+3)} = \frac{4}{25} \cdot \frac{1}{s-2} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{(s-2)^2} - \frac{4}{25} \cdot \frac{1}{s+3} \quad (\text{f})$$

然后根据式(8.22), 式(8.23)

$$\mathcal{L}[e^{2t}] = \frac{1}{s-2}, \quad \mathcal{L}[te^{2t}] = \frac{1}{(s-2)^2}, \quad \mathcal{L}[e^{-3t}] = \frac{1}{s+3}$$

从而

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-2}\right] &= e^{2t} \\ \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-2)^2}\right] &= te^{2t} \\ \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+3}\right] &= e^{-3t} \end{aligned} \right\} \quad (\text{g})$$

将式(g)代入式(f)的逆变换中

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s-1}{(s-2)^2(s+3)}\right] &= \frac{4}{25}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-2}\right] + \frac{1}{5}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-2)^2}\right] - \frac{4}{25}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+3}\right] \\ &= \frac{4}{25}e^{2t} + \frac{1}{5}te^{2t} - \frac{4}{25}e^{-3t} \end{aligned}$$

8.5 在工程上的应用

[例 8.8] 图 8.7 表示的是 R - L 串联回路, 如在 $t=0$ 时, 闭合开关, 那么, 流经回路的电流, 随时间有怎么样的变化。

【解】 表示电流随时间的变化的函数 $i(t)$, 用以下的微分方程式来给出。

$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = EH(t) \quad (a)$$

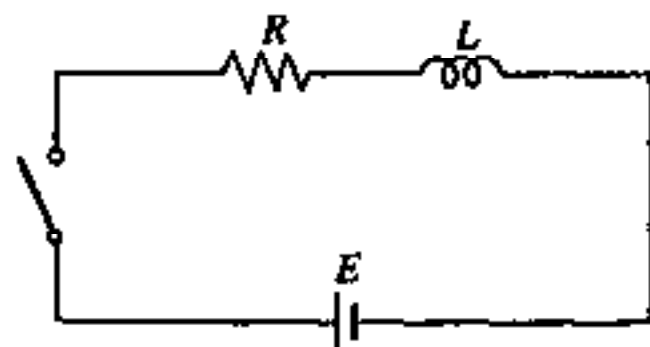


图 8.7 R-L 串联回路

式中, $H(t)$ 为电离的单位阶梯函数(参照例 8.5)。如两边作拉普拉斯变换

$$\mathcal{L}[i(t)] = I(s) \quad (b)$$

利用式(8.26), 式(8.29)

$$L\{sI(s) - i(0)\} + RI(s) = E/s$$

现在如设 $i(0) = 0$, 则

$$I(s) = \frac{E}{s(Ls + R)} = \frac{E}{R} \left\{ \frac{1}{s} - \frac{1}{s + (R/L)} \right\}$$

如两边作拉普拉斯逆变换

$$\begin{aligned} i(t) &= \mathcal{L}^{-1}[I(s)] = \frac{E}{R} \left\{ \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s + (R/L)}\right] \right\} \\ &= \frac{E}{R} (1 - e^{-(R/L)t}) \end{aligned}$$

这时电流随时间的变化显示出如图 8.8 所示的特性。

【例 8.9】 如图 8.9 所示, 弹簧常数为 k 的弹簧一端被固定, 另一端连接质量为 m 的质点, 如在 $t=0$ 的瞬间, 在质点上突然加上大小为 1 的力, 如那样地持续下去, 质点的位移 x , 如何用时间的函数来表示。这里设初位移 $x(+0)$, 初速度 $x'(+0)$ 均为零。

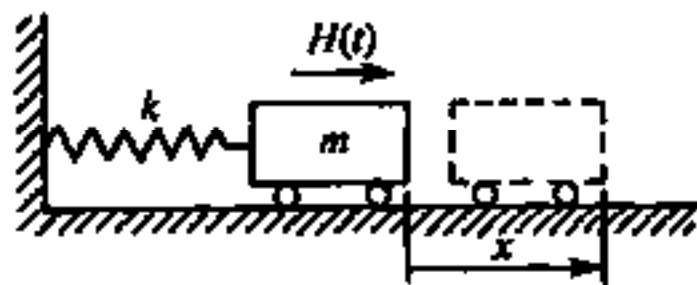
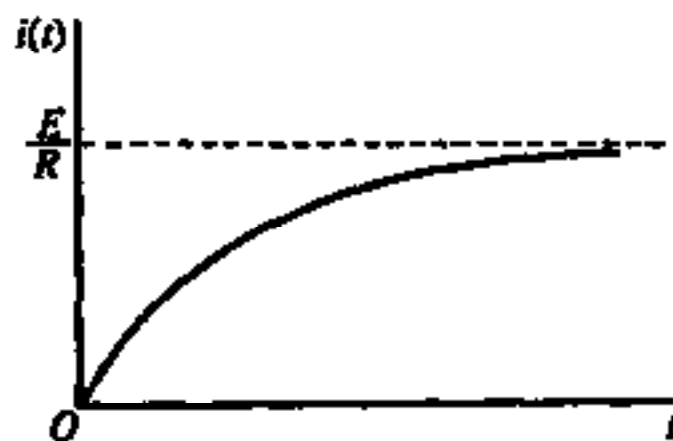


图 8.8 R-L 串联回路的电流随时间的变化 图 8.9 受单位阶梯函数的外力的弹簧-质量系统

[解] 运动方程式为 $m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = -kx(t) + H(t)$ (a)

式中, $H(t)$ 为电离的单位阶梯函数(参照例 8.5), 设

$$\mathcal{L}[x(t)] = X(s)$$

如利用式(8.26), 式(8.31), 则取式(a)两边的拉普拉斯变换

$$m\{s^2 X(s) - sx(+0) - x'(+0)\} = -kX(s) + \frac{1}{s}$$

代入初条件

$$x(+0) = x'(+0) = 0$$

就得 $X(s)$ 的解

$$X(s) = \frac{1}{s(ms^2 + k)} = \frac{1}{ms(s^2 + \omega^2)}$$

式中 $\omega^2 \equiv k/m$

如将 $X(s)$ 分解为部分分式, 则

$$X(s) = \frac{1}{ms(s^2 + \omega^2)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs + C}{s^2 + \omega^2}$$

如两边乘上 $ms(s^2 + \omega^2)$, 并将分母通分, 则

$$\begin{aligned} 1 &= Am(s^2 + \omega^2) = Bms^2 + Cms \\ &= m(A + B)s^2 + Cms + Am\omega^2 \end{aligned}$$

比较两边 s 的各次幂的系数

$$A + B = 0$$

$$C = 0$$

$$Am\omega^2 = 1$$

接着

$$A = \frac{1}{m\omega^2} = \frac{1}{k}, \quad B = -\frac{1}{k}, \quad C = 0$$

所以

$$X(s) = \frac{1}{ks} - \frac{1}{k} \cdot \frac{s}{s^2 + \omega^2} = \frac{1}{k} \left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + \omega^2} \right) \quad (b)$$

然后, 根据式(8.19), 问 8.9(c)

$$\mathcal{L}[1] = \frac{1}{s}$$

$$\mathcal{L}[\cos \omega t] = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

接着有

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] &= 1 \\ \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2 + \omega^2}\right] &= \cos \omega t \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

在式(b)的反变换中代入式(c)

$$\begin{aligned} x(t) &= \mathcal{L}^{-1}[X(s)] = \frac{1}{k} \left(\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2 + \omega^2}\right] \right) \\ &= \frac{1}{k} (1 - \cos \omega t) \end{aligned}$$

所以,质点作以单位荷重 1 产生静位移的 $1/k$ 的点为中心,振幅为 $1/k$ 的简谐振动。

习题 8

8.1 在 $-\pi$ 和 π 之间,试将由下列给出的函数 $f(x)$ 展开成周期为 2π 的傅立叶级数。

(a) $f(x) = x$ (b) $f(x) = |x|$

8.2 将 q 作为常数时,试将在 $-l < x < 0$ 时, $f(x) = -q$, 在 $0 < x < l$ 时, $f(x) = q$ 的给定函数 $f(x)$, 展开为周期 $2l$ 的傅立叶级数。

8.3 试将泊松核(Poisson kernel)①

$$\frac{1 - \zeta^2}{1 - 2\zeta \cos \theta + \zeta^2} \quad (|\zeta| < 1)$$

展开成傅立叶级数。

[提示] 这个展开不使用式(8.2), 只是作复变函数的幂级数展开。原式改变为

$$\begin{aligned} \frac{1 - \zeta^2}{1 - 2\zeta \cos \theta + \zeta^2} &= \frac{2 - 2\zeta \cos \theta}{1 - 2\zeta \cos \theta + \zeta^2} - 1 = \frac{1}{1 - \zeta e^{i\theta}} + \frac{1}{1 - \zeta e^{-i\theta}} - 1 \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (\zeta e^{i\theta})^n + \sum_{n=0}^{\infty} (\zeta e^{-i\theta})^n - 1 \end{aligned}$$

利用 $e^{\pm i n \theta} = \cos n \theta \pm i \sin n \theta$ 。

8.4 将

① 在上述的泊松积分(式(7.110))中,是 $R=1$ 时,被积函数中出现的函数。

$$f * g = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) f(x-\xi) d\xi$$

定义为 f 和 g 区间 $(-\infty, \infty)$ 内的积分, 称为合成积 (convolution) 或卷积 (Faltung)。并用记号 $f * g$ 表示。若将 F, G 记作 f, g 的傅立叶变换时, 试证明

$$f * g = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(t) G(t) e^{-i\omega t} dt = g * f$$

[提示] 在 $\int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) f(x-\xi) d\xi$ 中, 首先将 $f(x-\xi)$ 表示为 F 的傅立叶逆变换, 接着在交换二重积分的顺序后, g 也采用傅立叶逆变换公式, 用 G 表示。

8.5 将第 n 阶导函数的傅立叶变换表示为

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^n f}{dx^n} e^{-i\omega x} dx = F^{(n)}(\omega)$$

如设 $|x| \rightarrow \infty$ 时, $d^{n-1} f / dx^{n-1} \rightarrow 0$, 则为

$$F^{(n)} = i\omega F^{(n-1)}$$

另外, 若有

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{d^r f}{dx^r} = 0 \quad (r=1, 2, \dots, n-1)$$

则有

$$F^{(n)} = (i\omega)^n F$$

8.6 当 $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ 时, 试证明下列公式

$$(a) \mathcal{L}[f(at)] = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$$

$$(b) \mathcal{L}[tf(t)] = -\frac{dF(s)}{ds}$$

$$(c) \mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right] = \int_s^{\infty} F(\sigma) d\sigma$$

8.7 图 8.10 是在脉冲回路中的单一矩形波。试求这个函数的傅立叶变换。

[提示] $f(t) = H(t) - H(t-T)$

8.8 如图 8.11 所示, 当周期 T 、脉冲 $f(t)$ 重复时, 这个周期函数

$$y(t) = f(t) + f(t-T) + f(t-2T) + \dots$$

的拉普拉斯变换, 在 $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ 时, 由

$$Y(s) = \frac{F(s)}{1 - e^{-sT}}$$

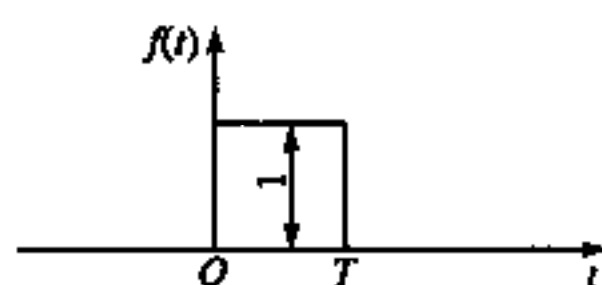


图 8.10 单一矩形波

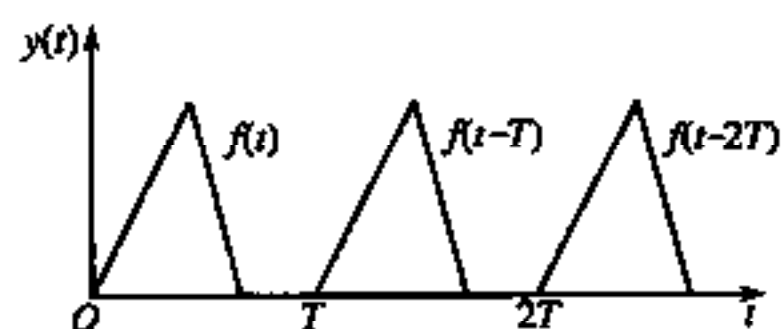


图 8.11

给出。

8.9 在拉普拉斯变换中,与题 8.4 相同,将

$$x(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

定义为函数 f 和 g 的 $(0, \infty)$ 内的积分,称为卷积,将右边的积分表示为 $f * g$ 。

(a) 交换律 $f * g = g * f$ 成立。

(b) 将 $x(t)$, $f(t)$, $g(t)$ 的拉普拉斯变换记为 $X(s)$, $F(s)$, $G(s)$ 时,则有

$$X(s) = F(s)G(s)$$

第九章 微分方程

9.1 微分方程

表示独立变量、函数及其导出函数之间关系的等式称为微分方程(differential equation)。例如

$$\frac{dy}{dx} + x - y = 0 \quad (a)$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + 3\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2\sin y = \sin x \quad (b)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \quad (c)$$

是微分方程。最高微分阶数如式(a)为1阶时称为一阶微分方程(differential equation of first order);如式(b),(c)为2阶时称为2阶微分方程(differential equation of second order)。还有,如式(a),式(c)中,未知函数; $y=y(x)$, $z=z(x,y)$ 或者其导函数为1次式为线性微分方程(linear differential equation);不是这种情况的如(b)称为非线性微分方程(nonlinear differential equation)。更有,式(a),(b)含有一个变量的函数的导函数称为常微分方程(ordinary differential equation),如式(c)含有偏导函数的称为偏微分方程。

把某个函数(上例式(a),(b)为 $y=y(x)$, (c)为 $z=z(x,y)$)代入微分方程中使其满足时,这函数称为微分方程的解(solution)。在常微分方程的情况,含有与微分方程阶数相同的独立的任意常数解称为通解(general solution),这任意常数给予特定的值时称为特解(particular solution)^①。求微分方程的所有解的过程称为解微分方程(solve)^②。

9.2 1阶常微分方程

A. 变量分离形

函数 $f(x)$, $g(y)$ 分别为 x , y 的已知函数, $y=y(x)$ 为未知函数时,形如

① 在偏微分方程中也同样考虑通解和特解,但是,与在常微分方程的情况下考虑任意常数不同,而是考虑任意函数。

② 存在微分方程通解以外的解。将这称为奇异解(singular solution)。

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \quad (9.1)$$

的 1 阶微分方程称为变量分离形的微分方程(differential equation of variable separable), 对它变形为

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$$

用左边只有 y , 右边只有 x 的形式来表示, 两边积分, C 为积分常数, 得

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C \quad (9.2)$$

式(9.2)给出 y 是 x 的函数, 含有与微分方程阶数相同个数的 1 个积分常数, 是原微分方程(9.1)的通解。

[例 9.1] 如图 9.1(a)所示, 在横截面积相同的水桶的底上开一个小孔让水流出时(水力学中称为孔), 求最初桶内水位为 H 、桶内变空时所需要的时间。其中, A 为桶底面积, S 为孔面积。

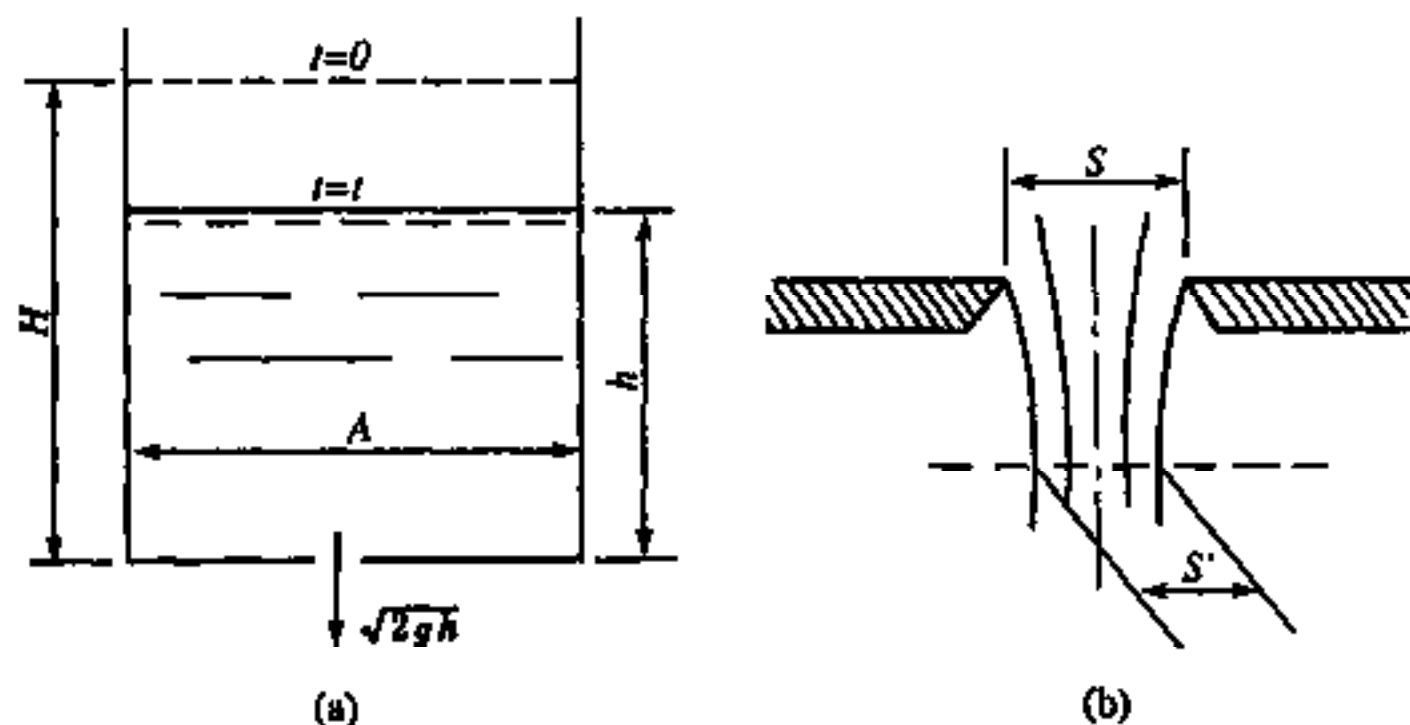


图 9.1 从桶底孔中的水流出

[解] 设在图 9.1(a)所示的桶中, 任意时刻 t 的水位为 h , 在 dt 时间下降的水位为 $|dh| = -dh$ ($dh < 0$, $-dh > 0$), 由液面下降计算出的桶中水的体积的减少, 可以由与其相等的从托里拆利定理^①计算得出的孔中水的流出体积

$$|dh|A = -dh \cdot A = C_d S \sqrt{2gh} \cdot dt \quad (9.3)$$

给出。其中, C_d 称为流量系数(coefficient of discharge)如图 9.1(b)。由于喷流截面

① 在水力学中的托里拆利定理, 从小孔中的流出速度由 $C_d \sqrt{2gh}$ 来给出。

积 S' 比孔截面积 S 小并有种种阻力,它是修正流速比理论值少的系数。
式(9.3)变形

$$dt = \frac{-Adh}{C_d S \sqrt{2gh}} \quad (9.4)$$

即

$$\frac{dt}{dh} = f(t)g(h) \quad (9.5)$$

是变量分离形微分方程的特别的情况。式(9.4)两边积分,得

$$\begin{aligned} t &= -\frac{A}{C_d S \sqrt{2g}} \int \frac{dh}{\sqrt{h}} + C \\ &= -\frac{2A\sqrt{h}}{C_d S \sqrt{2g}} + C \quad (C=\text{积分常数}) \end{aligned} \quad (9.6)$$

式(9.6)是微分方程(9.4)的通解。这种情况,根据初始条件(initial condition),可以确定这个积分常数。因为最初桶的水位为 H ,所以, $t=0$ 时, $h=H$ 。

$$C = \frac{2A\sqrt{H}}{C_d S \sqrt{2g}} \quad (9.7)$$

把式(9.7)代入式(9.6),得

$$t = \frac{2A}{C_d S \sqrt{2g}} (\sqrt{H} - \sqrt{h}) \quad (9.8)$$

t 就是桶内的水位由 H 减少为 h 所需的时间,特别是最初水位 H 到桶空的时间 T ,由式(9.8)中的 $h=0$ 给出。

$$T = \frac{2AH}{C_d S \sqrt{2gH}} \quad (9.9)$$

[问 9.1] 求解下列微分方程

$$(a) \quad xdx + ydy = 0 \quad (b) \quad (a^2 - x^2) \frac{dy}{dx} = y$$

B. 1 阶线性常微分方程

$P(x), Q(x)$ 为 x 的已知函数,形如

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \quad (9.10)$$

的微分方程称为 1 阶线性微分方程。

首先,考察 $Q(x) \equiv 0$, 即

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0 \quad (9.11)$$

或

$$\frac{dy}{dx} = -P(x)y \quad (9.12)$$

其各项中未知函数 y 及其导函数 dy/dx 都是一次的, 因为所有的项都是同次的, 所以, 这种微分方程称为齐次微分方程 (homogeneous differential equation)。相对应, 虽然原微分方程 (9.10) 的左边 dy/dx 或者 y 是一次的, 但右边不含 y 或 dy/dx , 这是 0 次的, 所有的项不是同次的, 这种微分方程称为非齐次微分方程。

首先解齐次微分方程 (9.12)。这种微分方程, 其实是前面所叙述的已知解法的变量分离形。将式 (9.12) 变形

$$\frac{dy}{y} = -P(x)dx$$

所以

$$\int \frac{dy}{y} = - \int P(x)dx + \log C$$

这里, 为了后面表达式简单, 积分常数记为 $\log C$ 。左边积分

$$\log|y| - \log C = - \int P(x)dx$$

所以

$$\log \frac{|y|}{C} = - \int P(x)dx$$

所以

$$\frac{y}{C} = e^{-\int P(x)dx}$$

这里, 因为左边的指数函数必为正, 故 y, C 考虑共同取正。

所以

$$y = Ce^{-\int P(x)dx} \quad (9.13)$$

这是微分方程式 (9.12) 的通解。从而式 (9.13) 中含 $C=1$, 即

$$y_1 = e^{-\int P(x)dx} \quad (9.14)$$

是微分方程式 (9.12) 的特解。这个 y_1 用于原微分方程 (9.10) 的解 y 的如下置换:

$$y = y_1 v \quad (9.15)$$

其中, v 是 x 的函数。

式(9.15)是式(9.13)的常数 C 用函数 $v(x)$ 置换的形式。如此的置换解非齐次微分方程的方法称为常数变易法(variation of constomt)。式(9.15)微分:

$$\frac{dy}{dx} = v \frac{dy_1}{dx} + y_1 \frac{dv}{dx} \quad (9.16)$$

将式(9.15), 式(9.16)代入式(9.10)

$$y_1 \frac{dv}{dx} + \left\{ \frac{dy_1}{dx} + P(x)y_1 \right\} v = Q(x)$$

然而 y_1 是微分方程(9.11)的特解, 因此上式 $\{ \}$ 内为零。

$$y_1 \frac{dv}{dx} = Q(x) \quad (9.17)$$

这里 y_1 是 x 的已知函数(9.14), 式(9.17)是以 $v=v(x)$ 为未知函数的变量分离形微分方程, 其通解为

$$v = \int \frac{Q(x)}{y_1} dx + C \quad (9.18)$$

把它代入式(9.15)

$$y = y_1 \left\{ \int \frac{Q(x)}{y_1} dx + C \right\} \quad (9.19)$$

把上式代入式(9.14)

$$y = e^{-\int P(x) dx} \left\{ \int Q(x) e^{\int P(x) dx} + C \right\} \quad (9.20)$$

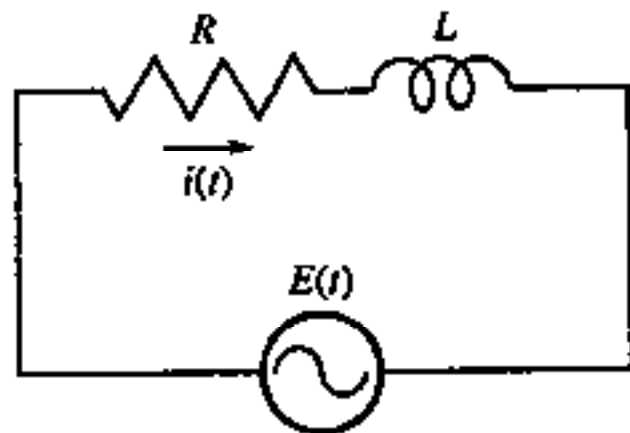


图 9.2 R-L 串联回路

这就是非齐次微分方程式(9.10)的通解。

[例 9.2] 如图 9.2 阻抗 R , 感应系数为 L 的电路内, 时刻 t 的电功率为 $E(t)$, 电流为 $i(t)$ 时微分方程^①

$$L \frac{di}{dt} + Ri = E(t) \quad (9.21)$$

成立。解这个方程式。

[解] 式(9.21)记作式(9.10)形式

^① 在第七章由于将虚数单位 $\sqrt{-1}$ 表示为 i , 所以希望与这些不要混淆。在有这种混淆可能时, 往往将 $\sqrt{-1}$ 用 j 表示。

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{E(t)}{L} \quad (9.22)$$

式(9.10)的 x, y, P, Q 代之以 $t, i, R/L, E(t)/L$, 因此, 式(9.20)也可像这样改写(9.20), 得到通解

$$i = e^{-\int (R/L) dt} \left\{ \int \frac{E(t)}{L} e^{\int (R/L) dt} dt + C \right\} \quad (9.23)$$

[问 9.2] 例 9.2 中特别给出 $E(t) = E_0 \sin \omega t$ 项 $t=0$ 时, $i=0$, i 用什么式子来给出?

在给出初始条件下($t=0$ 给出未知函数的值), 解这个微分方程, 可以使用拉普拉斯变换(例 8.8 为其一例)。

9.3 常系数 2 阶线性常微分方程

如图 9.3 所示, 质量为 m 的物体, 弹性系数为常数 k 的弹簧, 与阻力系数为 c 的阻尼器连接, $t=0$ 位移 x_0 , 给定初速度 \dot{x}_0 . 突然放开, 其后任意时刻, 其质量运动方程为

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -c \frac{dx}{dt} - kx \quad (9.24)$$

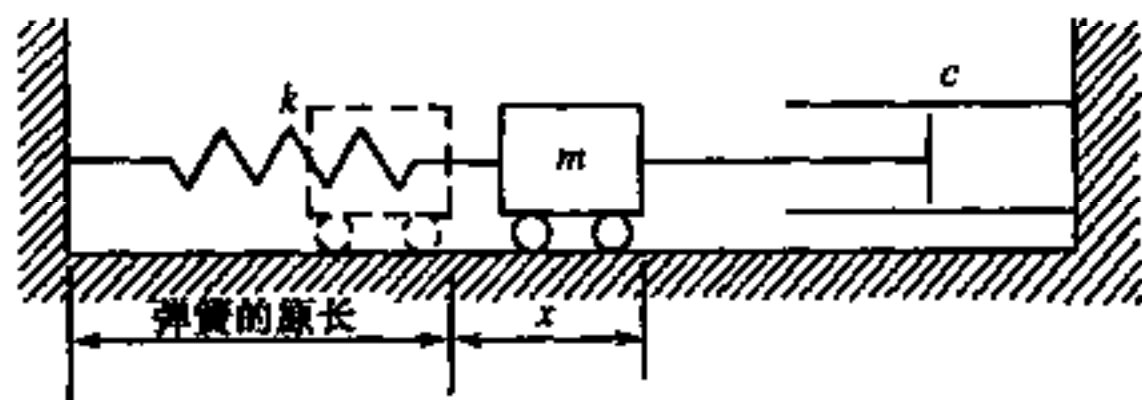


图 9.3 粘滞性衰减自由振动

两边除以 m , 为了简单设

$$\frac{c}{m} \equiv 2b, \quad \frac{k}{m} \equiv p^2 \quad (9.25)$$

式(9.24)成为

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2b \frac{dx}{dt} + p^2 x = 0 \quad (9.26)$$

这是齐次微分方程, 为了求微分方程通解, 令

$$x = e^{\lambda t} \quad (9.27)$$

代入式(9.26), 两边除以 $e^{\lambda t} (>0)$, 得到以 λ 为未知数的方程

$$\lambda^2 + 2b\lambda + p^2 = 0 \quad (9.28)$$

这个方程称为特征方程(characteristic equation)。其方程的两根为

$$\lambda = -b \pm p' \quad (p' = \sqrt{b^2 - p^2}) \quad (9.29)$$

设这两根为 λ_1, λ_2 , 得到两个线性无关解。

$$\left. \begin{array}{ll} \lambda_1 \neq \lambda_2 \text{ 时} & x_1 = e^{\lambda_1 t}, \quad x_2 = e^{\lambda_2 t} \\ \lambda_1 = \lambda_2 \text{ 时} & x_1 = e^{\lambda_1 t}, \quad x_2 = te^{\lambda_1 t} \end{array} \right\} \quad (9.30)$$

其线性无关解 x_1, x_2 的线性组合为通解

$$x = C_1 x_1 + C_2 x_2, \quad (C_1, C_2 = \text{任意常数}) \quad (9.31)$$

以上为微分方程(9.26)解法的主要过程。具体的通过下面例题, 理解 λ_1, λ_2 为相异实根的情况; 等根的情况共轭复根的情况。

[例 9.3] 解下面常系数 2 阶齐次线性微分方程。

$$(a) \frac{d^2 x}{dt^2} + 3 \frac{dx}{dt} + 2x = 0$$

$$(b) \frac{d^2 x}{dt^2} - 4 \frac{dx}{dt} + 4x = 0$$

$$(c) \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + 2x = 0$$

[解] (a) 令 $x = e^{\lambda t}$

$$\frac{dx}{dt} = \lambda e^{\lambda t}, \quad \frac{d^2 x}{dt^2} = \lambda^2 e^{\lambda t}$$

代入式(a)的微分方程中, 两边除以 $e^{\lambda t}$, 特征方程为

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$$

所以

$$(\lambda + 1)(\lambda + 2) = 0$$

$$\lambda = -1, \lambda = -2$$

从而, 两个线性无关解为

$$x_1 = e^{-t} \quad x_2 = e^{-2t}$$

所求通解为其线性组合。

$$x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t}$$

(b) 特征方程为

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$$

所以

$$(\lambda - 2)^2 = 0$$

$$\lambda = 2 \text{ (等根)}$$

故在式(9.30)中 $\lambda_1 = \lambda_2$ 的情况, 设

$$x_1 = e^{2t} \quad x_2 = tx_1 = te^{2t}$$

两者是满足问题的微分方程的线性无关解。其通解

$$x = C_1 e^{2t} + C_2 t e^{2t} = (C_1 + C_2 t) e^{2t}$$

(c) 特征方程

$$\lambda^2 + \lambda + 2 = 0$$

故根据 2 次方程的求根公式

$$\lambda = (-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \times 1 \times 2}) / 2 = (-1 \pm \sqrt{-7}) / 2 = (-1 \pm \sqrt{7}i) / 2$$

故两线性无关解由欧拉公式给出

$$x_1 = e^{(-1+\sqrt{7}i)/2} = e^{-t/2} e^{\sqrt{7}it/2} = e^{-t/2} \{ \cos(\sqrt{7}t/2) + i \sin(\sqrt{7}t/2) \}$$

$$x_2 = e^{(-1-\sqrt{7}i)/2} = e^{-t/2} e^{-\sqrt{7}it/2} = e^{-t/2} \{ \cos(\sqrt{7}t/2) - i \sin(\sqrt{7}t/2) \}$$

故通解, 可通过任意常数 C_1', C_2' 时的线性组合所给出。

$$\begin{aligned} x = & C_1' e^{-t/2} \{ \cos(\sqrt{7}t/2) + i \sin(\sqrt{7}t/2) \} \\ & + C_2' e^{-t/2} \{ \cos(\sqrt{7}t/2) - i \sin(\sqrt{7}t/2) \} \end{aligned}$$

这里任意常数重新设为

$$C_1 \equiv C_1' + C_2', \quad C_2 \equiv i(C_1' - C_2')$$

的话, 得通解

$$x = e^{-t/2} \{ C_1 \cos(\sqrt{7}t/2) + C_2 \sin(\sqrt{7}t/2) \}$$

其次图 9.3 质量 m , 加上随时间变动的外力 $F(t)$, 运动方程(9.24)右边追加一项 $F(t)$ 得下式

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -C \frac{dx}{dt} - kx + F(t)$$

微分方程成为非齐次, 两边除以 m , 令 $f(t) \equiv F(t)/m$, 由(9.25)

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2b \frac{dx}{dt} + p^2 x = f(t) \quad (9.32)$$

现在,用一定方法求非齐次微分方程特解, x_p , 记为 $x_p(t)$ 满足式(9.32)

$$\frac{d^2 x_p}{dt^2} + 2b \frac{dx_p}{dt} + p^2 x_p = f(t) \quad (9.33)$$

由式(9.32)式(9.33)两边相减得

$$\frac{d^2}{dt^2}(x - x_p) + 2b \frac{d}{dt}(x - x_p) + p^2(x - x_p) = 0 \quad (9.34)$$

$x - x_p$ 为满足齐次方程(9.26), 因此齐次微分方程的通解为 x_c .

$$x - x_p = x_c$$

所以

$$x = x_c + x_p \quad (9.35)$$

因此, 非齐次方程的通解与原非齐次方程的非齐次项 $f(t)$ 为零时的齐次方程的通解 x_c (此称为基本解(fundamental solution)或辅助解(complementary solution)) 和原非齐次方程的特解 x_p 之和相等。

[例 9.4] 式(9.32)特别 $f(t) = q \sin \omega t$ 时, 解这微分方程。其中, $p^2 - b^2 > 0$ 。

[解] 首先, 问题的微分方程所对应的齐次微分方程是式(9.26)。其通解即本问题的基本解或辅助解, 由式(9.29), (9.30), (9.31)得到。

$$\begin{aligned} x_c &= C_1' e^{(-b + \sqrt{b^2 - p^2})t} + C_2' e^{(-b - \sqrt{b^2 - p^2})t} \\ &= e^{-bt} (C_1' e^{\sqrt{p^2 - b^2}t} + C_2' e^{-\sqrt{p^2 - b^2}t}) \end{aligned}$$

与例 9.3(c) 同样, 用欧拉公式

$$\begin{aligned} x_c &= e^{-bt} (C_1 \cos \sqrt{p^2 - b^2}t + C_2 \sin \sqrt{p^2 - b^2}t) \\ &= A e^{-bt} \cos(\sqrt{p^2 - b^2}t + \epsilon) \end{aligned}$$

其中

$$C_1 = A \cos \epsilon \quad C_2 = -A \sin \epsilon \quad (a)$$

其次, 为求问题微分方程的特解; 假定有下面形式的特解 x_p

$$x_p = E \sin \omega t + F \cos \omega t \quad (b)$$

把其代入式(9.32)的微分方程, 比较两边 $\sin \omega t, \cos \omega t$ 的系数:

$$\begin{cases} E(p^2 - \omega^2) - 2b\omega F = q \\ F(p^2 - \omega^2) + 2b\omega E = 0 \end{cases} \quad (c)$$

解出 E, F

$$\left. \begin{aligned} E &= \frac{q(p^2 - \omega^2)}{(p^2 - \omega^2)^2 + 4b^2\omega^2} \\ F &= -\frac{2qb\omega}{(p^2 - \omega^2)^2 + 4b^2\omega^2} \end{aligned} \right\} \quad (d)$$

因此, 式(d)代入式(b)的特解得到 x_p , 式(a)代入式(9.35)本问题的通解

$$\begin{aligned} x &= Ae^{-bt} \cos(\sqrt{p^2 - b^2}t + \epsilon) \\ &\quad + \frac{q}{(p^2 - \omega^2)^2 + 4b^2\omega^2} \{ (p^2 - \omega^2) \sin \omega t - 2b\omega \cos \omega t \} \\ &= Ae^{-bt} \cos(\sqrt{p^2 - b^2}t + \epsilon) \\ &\quad + \frac{q}{\sqrt{(p^2 - \omega^2)^2 + 4b^2\omega^2}} \left\{ \frac{p^2 - \omega^2}{\sqrt{(p^2 - \omega^2)^2 + 4b^2\omega^2}} \sin \omega t - \frac{2b\omega}{\sqrt{(p^2 - \omega^2)^2 + 4b^2\omega^2}} \cos \omega t \right\} \\ &= Ae^{-bt} \cos(\sqrt{p^2 - b^2}t + \epsilon) + \frac{q}{\sqrt{(p^2 - \omega^2)^2 + 4b^2\omega^2}} \sin(\omega t + \varphi) \end{aligned}$$

其中, 以 $\sqrt{(p^2 - \omega^2)^2 + 4b^2\omega^2}$, $p^2 - \omega^2$, $2b\omega$ 为三边的直角三角形边 $\sqrt{(p^2 - \omega^2)^2 + 4b^2\omega^2}$ 与 $p^2 - \omega^2$ 之间的角为 $-\varphi$

例 9.4 是式(9.33)右边 $f(t)$ 为简单的正弦函数 $q \sin \omega t$ 的情况。由直觉, 特解 x_p 取式(b)的假定, 而一般的 $f(t)$ 对应的特解 x_p 不能简单求得时, 由下式求特解。(证明略^①)

$$x_p = \frac{1}{p'} \int_0^t f(\tau) e^{-\kappa(t-\tau)} \sin p'(t-\tau) d\tau \quad (9.36)$$

其中 $p' = \sqrt{p^2 - b^2}$

[问 9.3] 解下列微分方程

$$(a) \frac{d^2 x}{dt^2} + 5 \frac{dx}{dt} + 6x = 3 \sin 2t$$

$$(b) \frac{d^2 x}{dt^2} - 6 \frac{dx}{dt} + 9x = e^t$$

$$(c) \frac{d^2 x}{dt^2} - 4 \frac{dx}{dt} + 13x = -\cos t$$

① 岡谷, 大岩, 藤沢, 工業技術者のための応用数学概要, いずみ書房(1962). p. 257.

9.4 二阶非线性常微分方程

这里,研究有一大振幅的单摆(simple pendulum)的例子。如图 9.4 所示一点 O 系一长为 l 无伸缩的绳,绳另一端系着质量为 m 的质点。 O 点的垂线下方点 A (质点)以所给水平初速度 v_0 作圆周运动。



图 9.4 大振幅的单摆

这时,圆的切线方向的运动方程,用从 $t=0$ 时的半径到时刻 t 时半径旋转角 θ 表示:

$$ml \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg \sin\theta$$

即

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l} \sin\theta \quad (9.37)$$

其右边

$$\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots$$

因此非 θ^0 的 1 次,故为 2 阶非线性微分方程,现解之。两边乘以 $2(d\theta/dt)$ 变成

$$2 \frac{d\theta}{dt} \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{2g}{l} \sin\theta \frac{d\theta}{dt}$$

所以

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = -\frac{2g}{l} \sin\theta \frac{d\theta}{dt}$$

$$d \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = -\frac{2g}{l} \sin\theta d\theta$$

两边积分

$$\left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = \frac{2g}{l} \cos\theta + C_1 \quad (C_1 = \text{积分常数}) \quad (9.38)$$

$t=0$ 时条件,即初始条件(initial condition), $t=0$ 时 $\theta=0$, $l(d\theta/dt)=v_0$,从而

$$C_1 = \left(\frac{v_0}{l} \right)^2 - \frac{2g}{l} \quad (9.39)$$

将式(9.39)代入式(9.38)

① 如 θ 非常小,在此式中能够省略第 2 项以后的,为 $\sin\theta=\theta$,可以将式(9.37)近似地作为线性微分方程。

$$\begin{aligned}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 &= \left(\frac{v_0}{l}\right)^2 - \frac{2g}{l}(1 - \cos\theta) \\ &= \left(\frac{v_0}{l}\right)^2 - \frac{2g}{l}\left\{1 - \left(1 - 2\sin^2 \frac{\theta}{2}\right)\right\} = \left(\frac{v_0}{l}\right)^2 - \frac{4g}{l}\sin^2 \frac{\theta}{2}\end{aligned}$$

所以

$$\frac{d\theta}{dt} = \pm \frac{v_0}{l} \sqrt{1 - \frac{4gl}{v_0^2} \sin^2 \frac{\theta}{2}} \quad (9.40)$$

上式右边的符号初始为正, 随 θ 的增加 $\frac{d\theta}{dt}$ 递减, 其次考察两种情况:

(a) $4gl/v_0^2 < 1$ 的情况, 此情况不存在 $\frac{d\theta}{dt} = 0$ 的 θ , 故 $d\theta/dt > 0$, 质点在圆周沿一方向作旋转运动。

(b) $4gl/v_0^2 > 1$ 的情况, 此情况存在 $\frac{d\theta}{dt} = 0$ 的 θ , 即随 θ 增加 $\frac{d\theta}{dt}$ 递减, 在 $\theta = \alpha$ 时停止, 然后开始逆向运动(式(9.40)右边的符号, 这时取负号)。 $\theta = -\alpha$ 再停止, 再向 θ 的增加的方向起动, 这在 $\theta = -\alpha, \theta = +\alpha$ 之间振动, 振动的周期的 $\frac{1}{4}$ 与从 $\theta = 0$ 到 $\theta = \alpha$ 所行时间相等, 式(9.40)由下式计算, 即式(9.40)变为:

$$dt = \frac{d\theta}{\frac{v_0}{l} \sqrt{1 - \frac{4gl}{v_0^2} \sin^2 \frac{\theta}{2}}} \quad (9.41)$$

由 $\theta = \alpha, \frac{d\theta}{dt} = 0$, 由式(9.40)

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{v_0^2}{4gl} \quad (9.42)$$

将式(9.42)代入式(9.41)两边积分, 式(9.42)中 v_0 解出代入

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{4}T} dt &= \int_0^{\alpha} \frac{d\theta}{\frac{v_0}{l} \sqrt{1 - \left(\sin^2 \frac{\theta}{2} / \sin^2 \frac{\alpha}{2}\right)}} \\ &= \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\alpha} \frac{d\theta}{2\sin \frac{\alpha}{2} \sqrt{1 - \left(\sin^2 \frac{\theta}{2} / \sin^2 \frac{\alpha}{2}\right)}}\end{aligned} \quad (9.43)$$

这里, 令

$$k \equiv \sin \frac{\alpha}{2}, \quad k \sin \varphi \equiv \sin \frac{\theta}{2}$$

$\theta=0$ 时, $\varphi=0$, $\theta=\alpha$ 时, $\varphi=\frac{\pi}{2}$

$$\frac{1}{2} \cos \frac{\theta}{2} d\theta = k \cos \varphi d\varphi \quad (9.44)$$

还有, 在此种情况 $\theta \leq \alpha < \pi$, 从而有 $\theta/2 < \pi/2$

$$\cos \frac{\theta}{2} = \sqrt{1 - \sin^2 \frac{\theta}{2}} = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}$$

从而, 式(9.44)解出 $d\theta$ 代入上式

$$d\theta = \frac{2k \cos \varphi d\varphi}{\cos \frac{\theta}{2}} = \frac{2k \cos \varphi d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \quad (9.45)$$

再有

$$\sqrt{1 - \left(\sin^2 \frac{\theta}{2} / \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right)} = \sqrt{1 - \sin^2 \varphi} = \cos \varphi \quad (9.46)$$

将式(9.45), (9.46)代入式(9.43)

$$\frac{1}{4} T = \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2k \cos \varphi}{2k \cos \varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} d\varphi$$

所以

$$T = 4 \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \quad (9.47)$$

其右边定积分

$$K \equiv \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \quad (9.48)$$

为第一类椭圆积分 (complete elliptic integral of first kind) 通常其数值由数表给出^①。

① I. N. 布朗シュティン・K. A. セメンジャーエフ (矢野監修, 宮本訳): 数学ハンドブック, 森北 (1985), p. 13, p. 348。

9.5 联立常微分方程组

研究一例常系数 2 阶齐次线性联立微分方程组

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + b_1 x + c_2 \frac{dy}{dt} &= 0 \\ \frac{d^2 y}{dt^2} + a_2 \frac{dy}{dt} + b_2 y + c_1 \frac{dx}{dt} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (9.49)$$

解之,首先令

$$x = Ae^{\lambda t}, y = Be^{\lambda t} \quad (9.50)$$

代入式(9.49)得到下面联立代数方程组。

$$\left. \begin{aligned} A(\lambda^2 + a_1 \lambda + b_1) + Bc_1 \lambda &= 0 \\ Ac_2 \lambda + B(\lambda^2 + a_2 \lambda + b_2) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (9.51)$$

由这方程组具有非零解($A=B=0$ 以外的解)的条件,得到特征方程

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 + a_1 \lambda + b_1 & c_1 \lambda \\ c_2 \lambda & \lambda^2 + a_2 \lambda + b_2 \end{vmatrix} = 0 \quad (9.52)$$

式(9.52)为 λ 的 4 次方程,故有 4 个根 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ 。如果没有重根^①,对上述 4 个根可用式(9.50)求得解,得到对应的特解:

$$\left. \begin{aligned} x_k &= A_k e^{\lambda_k t} \\ y_k &= B_k e^{\lambda_k t} \end{aligned} \right\} \quad (k=1, 2, 3, 4) \quad (9.53)$$

因此通解

$$\left. \begin{aligned} x &= \sum_{k=1}^4 x_k = \sum_{k=1}^4 A_k e^{\lambda_k t} \\ y &= \sum_{k=1}^4 y_k = \sum_{k=1}^4 B_k e^{\lambda_k t} \end{aligned} \right\} \quad (9.54)$$

这里 A_k, B_k , 在式(9.51)中以 λ_k 替代 λ 时的 A, B 。因此,由式(9.51)的 B_k 用 A_k 表示,变成:

^① 有重根的情况,可以同例 9.3(b)同样处理。

$$B_k = -\frac{\lambda_k^2 + a_1 \lambda_k + b_1}{c_1 \lambda_k} A_k = -\frac{c_2 \lambda_k}{\lambda_k^2 + a_2 \lambda_k + b_2} A_k \quad (9.55)$$

从而式(9.54)成为

$$\left. \begin{aligned} x &= \sum_{k=1}^4 A_k e^{\lambda_k t} \\ y &= -\sum_{k=1}^4 \frac{c_2 \lambda_k}{\lambda_k^2 + a_2 \lambda_k + b_2} A_k e^{\lambda_k t} \end{aligned} \right\} \quad (9.56)$$

λ_k 为复数根时, 求出 λ_k, A_k 为复数时式(9.56), 取实部(还有虚部)。

其次式(9.49)的右边为非零, 并且是 t 的已知函数 $f_1(t), f_2(t)$ 时

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + b_1 x + c_1 \frac{dy}{dt} &= f_1(t) \\ \frac{d^2 y}{dt^2} + a_2 \frac{dy}{dt} + b_2 y + c_2 \frac{dx}{dt} &= f_2(t) \end{aligned} \right\} \quad (9.57)$$

其通解, 与式(9.35)相同, 给出

$$x = x_c + x_p, \quad y = y_c + y_p \quad (9.58)$$

这里, x_c, y_c 是齐次微分方程(9.49)的通解, x_p, y_p 是非齐次微分方程(9.57)的特解。

9.6 偏微分方程

本节中, 叙述工程问题中常出现的二、三个偏微分方程。

A. 扩散方程

这是在热传导或物质的扩散问题中出现的方程。现考察最简单的线性热传导, 即考虑一方向(这里取 x 方向)的热流动。因此 x 轴的垂直方向无温度差, 与 x 轴垂

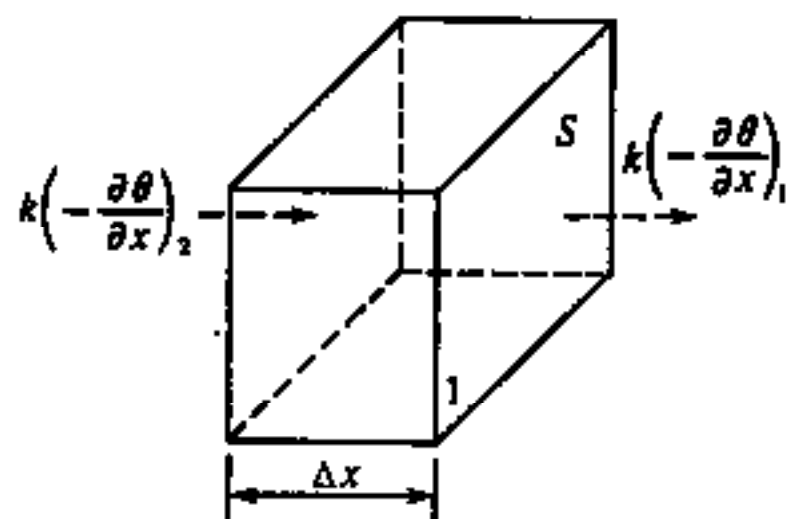


图 9.5 线性的热传导

直的平面为相同温度。因此, 认为温度 θ 是时间 t 和坐标 x 的函数 $\theta(t, x)$ 。通过等温面($x = \text{常数}$)上单位面积、单位时间流过的热量, 与这点的温度交流成比例, 由 $-k(\partial\theta/\partial x)$ 所给^①。这里, k 是常数称为热传导率(thermal conductivity)。

如图 9.5 所示, x 方向的长 Δx , 与 x 轴成垂直的截面积为 S , 考察比热 c , 密度 ρ 的固体这些要素, 这些要素接受的热量, 可用如下式的左右那样

^① 热传向 x 方向时, 温度在 x 方向减小下去, $\partial\theta/\partial x < 0$, 所以, $|\partial\theta/\partial x| = -\partial\theta/\partial x > 0$, 热量(每单位时间单位截面) $= -k\partial\theta/\partial x > 0$

用两种表示方法表达。由于它们相等。故有

$$c\rho \frac{\partial \theta}{\partial t} S \Delta x = \left\{ \left(-k \frac{\partial \theta}{\partial x} \right)_2 - \left(-k \frac{\partial \theta}{\partial x} \right)_1 \right\} S$$

两边除以 $c\rho S \Delta x$ 考察 $\Delta x \rightarrow 0$ 的极限时, 设 $\kappa \equiv k/c\rho$, 可得到线性热传导偏微分方程式或线性扩散方程式(diffusion equation)

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \quad (9.59)$$

这里, κ 为温度传导率(thermal diffusivity)

其次考察厚为 l 的无限宽的平板, 其厚方向取为 x 轴, 考察厚度方向(x 方向)的线性热传导^①。最初平板全体处于同一的一定温度 θ_0 。时刻 $t=0$ 之后, 突然平板之两表面温度为零, 以后两表面温度一直保持为零。这时, 考察平板内任意点的温度在任意时刻的情况, 把上面的边界条件和初始条件写作

$$\left. \begin{aligned} \theta(t, 0) = \theta(t, l) = 0 \\ \theta(0, x) = \theta_0 \end{aligned} \right\} \quad (9.60)$$

在以式(9.60)为条件下解偏微分方程(9.59)时, 需采用以后所叙述的变量分离方法。这种方法并不限于热传导方程。在各种偏微分方程的解法中也是常用手段。

首先温度函数 $\theta(t, x)$ 作为时间 t 的函数 $T(t)$ 和空间坐标 x 的函数 $X(x)$ 的积的形式

$$\theta(t, x) \equiv T(t)X(x) \quad (9.61)$$

式(9.61)代入式(9.59)

$$T'(t)X(x) = \kappa T(t)X''(x)$$

所以

$$\frac{T'(t)}{\kappa T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} \quad (9.62)$$

由于上式左边仅是 t 的函数, 右边仅是 x 的函数, 为使两边相等。两边必须各自与同一常数相等。这常数量为 $-p^2$, 因此

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = -\kappa p^2, \quad X''(x) + p^2 X(x) = 0 \quad (9.63)$$

由这第一式

^① 在图 9.5 中, 考察面积 S 的面变成无限大的时候。

$$\log T(t) = -\kappa^2 p t + \log A \quad (\log A = \text{积分常数})$$

所以

$$T(t) = A e^{-\kappa^2 p^2 t} \quad (9.64)$$

式(9.63)的第二式的通解

$$X(x) = B' \cos px + C' \sin px \quad (9.65)$$

其中, $B', C' = \text{积分常数}$ 。

将式(9.64), (9.65)代入式(9.61)

$$\begin{aligned} \theta(t, x) &= A e^{-\kappa^2 p^2 t} (B' \cos px + C' \sin px) \\ &= e^{-\kappa^2 p^2 t} (B \cos px + C \sin px) \end{aligned} \quad (9.66)$$

其中, AB', AC' 再设为 B, C 。由式(9.60)第一式的边界条件

$$B = 0, \quad C \sin pl = 0 \quad (9.67)$$

由这第二式 $C = 0$ 时 $\theta(t, x) \equiv 0$ 与物理意义不合理。从而

$$\sin pl = 0 \quad (9.68)$$

由此

$$pl = \pi, 2\pi, \dots, n\pi, \dots$$

从而

$$p = \frac{\pi}{l}, \frac{2\pi}{l}, \dots, \frac{n\pi}{l}, \dots$$

这里 p 写作 p_1, p_2, \dots, p_n

$$p_n \equiv \frac{n\pi}{l} \quad (n=1, 2, \dots) \quad (9.69)$$

因此, 式(9.66)的 p 以 p_n 代入时的 θ 记作 θ_n , C 记作 C_n 。

$$\theta_n(t, x) = C_n e^{-\kappa^2 p_n^2 t} \sin p_n x \quad (9.70)$$

它满足原偏微分方程, 这些函数的组合为解。

$$\theta(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \theta_n(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\kappa^2 p_n^2 t} \sin p_n x \quad (9.71)$$

把式(9.71)代入式(9.60)的第2式

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin p_n x = \theta_0 \quad (9.72)$$

其两边乘以 $\sin p_m x$ 在 $(0, l)$ 间积分

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n \int_0^l \sin p_n x \sin p_m x dx = \theta_0 \int_0^l \sin p_m x dx \quad (9.73)$$

$m \neq n$ 时

$$\begin{aligned} \int_0^l \sin p_m x \sin p_n x dx &= \frac{1}{2} \int_0^l \{ \cos(p_m - p_n)x - \cos(p_m + p_n)x \} dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(p_m - p_n)x}{p_m - p_n} - \frac{\sin(p_m + p_n)x}{p_m + p_n} \right]_0^l \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\sin(m-n)x}{p_m - p_n} - \frac{\sin(m+n)x}{p_m + p_n} \right\} = 0 \end{aligned} \quad (9.74)$$

$m = n$ 时

$$\begin{aligned} \int_0^l \sin p_m x \sin p_n x dx &= \int_0^l \sin^2 p_n x dx = \frac{1}{2} \int_0^l (1 - \cos 2p_n x) dx \\ &= \frac{1}{2} \left[x - \frac{\sin 2p_n x}{2p_n} \right]_0^l = \frac{l}{2} - \frac{\sin 2\pi n}{4p_n} = \frac{l}{2} \end{aligned} \quad (9.75)$$

另外

$$\begin{aligned} \int_0^l \sin p_m x dx &= - \left[\frac{\cos p_m x}{p_m} \right]_0^l = - \frac{(\cos m\pi - 1)}{(m\pi/l)} \\ &= \begin{cases} 0 & (m=2, 4, 6, \dots) \\ 2l/m\pi & (m=1, 3, 5, \dots) \end{cases} \end{aligned} \quad (9.76)$$

由式(9.74), 式(9.75), 式(9.76)代入式(9.73):

$$C_m = \begin{cases} 0 & (m=2, 4, 6, \dots) \\ 4\theta_0/m\pi & (m=1, 3, 5, \dots) \end{cases} \quad (9.77)$$

从而, 将式(9.77)代入式(9.71), 满足微分方程(9.59), 边界条件和初始条件(9.60)的解变成

$$\begin{aligned} \theta(t, x) &= \frac{4\theta_0}{\pi} \sum_{n=1, 3, \dots}^{\infty} \frac{1}{n} e^{-\frac{K^2 x^2}{t}} \sin \frac{n\pi x}{l} \\ &= \frac{4\theta_0}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)} e^{-\frac{K^2 (2n-1)^2 x^2}{t}} \sin \frac{(2n-1)\pi x}{l} \end{aligned} \quad (9.78)$$

B. 波动方程

考察波动方程的一个例子, 棒的纵振动方程。棒的一端突然加上轴向力。加上的力不是立即传到棒整体, 通过力产生的变形以弹性波(纵波)的形式通过棒传动。

棒的任意点(坐标 x)在任意时刻 t , 棒的轴向的位移 $u(t, x)$ 满足下面方程^①

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (9.79)$$

这里, $c = \sqrt{E/\rho}$, E 和 ρ 是棒的材料纵向弹性系数和密度, c 是由材料所确定的常数。

式(9.79)与前面的扩散方程相同, 可通过分离变量求出满足边界条件和初始条件的解^②。略去与前面类似的内容, 用变量变换导出通解。这里, 包含的物理意义被定性叙述。因此设

$$x + ct \equiv \xi, \quad x - ct \equiv \eta \quad (9.80)$$

由偏导数的连锁法则(式(4.8))

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} = c \frac{\partial u}{\partial \xi} - c \frac{\partial u}{\partial \eta} = c \left(\frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial \eta} \right) u$$

所以

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= c \left(\frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \cdot c \left(\frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial \eta} \right) u \\ &= c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \right) \end{aligned} \quad (9.81)$$

同样地

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \quad (9.82)$$

把式(9.81)式(9.82)代入式(9.79)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \quad (9.83)$$

两边把 η 看作常数对 ξ 积分

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \varphi(\eta) \quad (9.84)$$

其中, $\varphi(\eta)$ 是 η 的任意函数, 现将 ξ 看作常数对 η 积分, 变成

$$u = \int \varphi(\eta) d\eta + f(\xi) \quad (9.85)$$

① 関谷, 大岩, 藤沢, 工業技術者のための応用数学概要, いずみ書房(1962). p. 282.

② 妹沢, 振動学(上巻), 岩波(1932)p. 66.

这里 $f(\xi)$ 为 ξ 的任意函数, 这里令

$$g(\eta) \equiv \int \varphi(\eta) d\eta \quad (9.86)$$

则有

$$u = f(\xi) + g(\eta) \quad (9.87)$$

将(9.80)代入式(9.87)

$$u = f(x+ct) + g(x-ct) \quad (9.88)$$

这里, $f(x+ct)$, $g(x-ct)$ 分别是 $x+ct$, $x-ct$ 的任意函数式(9.88)是棒纵振动的波动方程式的通解。

其次, 考察此通解的物理意义。仅考虑式(9.88)的第二项。

$$u = g(x-ct) \quad (9.89)$$

在 $x-ct = \text{常数}$ 时 u 维持有同样的常数。因此 $d(x-ct) = 0$ 此时有 $dx/dt = c (> 0)$, 从而, 式(9.89)表示的弹性波沿 x 的正方向以速度 c 传动。同样, 式(9.88)右边第一项

$$u = f(x+ct) \quad (9.90)$$

表示以速度 c 向 x 负方向传播的波。因此, 可以知道通解(9.88)是由这两个波组成。

C. 拉普拉斯方程

二元的拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (9.91)$$

被写作

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (9.92)$$

上式将式(9.79)中 t, x, c 置换为 $x, y, i (= \sqrt{-1})$ 时而成的。从而, 对通解(9.88)作同样置换

$$u = f(x+iy) + g(x-iy) \quad (9.93)$$

由于 u 为实函数, 故右边的虚部必须消失, f 和 g 成为共轭函数^①, $z \equiv x+iy$, $\bar{z} \equiv x-iy$, 成为:

^① 对于 $f(z)$, $\bar{f}(\bar{z})$ 意味着 $f(z)$ 中的复数常数只作为共轭复数, $\bar{f}(\bar{z})$ 意味着复数常数与变量 z 均为共轭复数。

$$u = f(z) + \overline{f(\bar{z})} \quad (9.94)$$

在圆形区域内满足拉普拉斯方程,同时取在圆形区域边界上的值的函数可通过问 7.12(d) 的泊松积分来得到。

习题 9

9.1 解以下的微分方程式。

$$(a) (x^2 - a^2) \frac{dy}{dx} = y \quad (b) \frac{dy}{dx} + y = x \quad (c) \frac{d^2 y}{dx^2} + 4y = 0 \quad (d) \frac{d^2 y}{dx^2} + 5 \frac{dy}{dx} - 24y = 0$$

$$(e) \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + y = 0 \quad (f) \frac{d^2 x}{dt^2} - a^2 y = 0, \frac{d^2 y}{dt^2} + a^2 x = 0$$

9.2 在以下的微分方程中,由设 $u \equiv y/x$, 变换成以未知函数为 u 的微分方程,解出它以求出 u ,再由 u 求出 y 。

$$(a) xy^2 \frac{dy}{dx} = x^3 + y^3 \quad (b) x(x+y) \frac{dy}{dx} = 3y^3$$

[提示] 本题的微分方程式:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$$

的形式,在此,是 $P(x,y), Q(x,y) = x, y$ 的同次多项式。称这种微分方程式是同次形(homogeneous type),如将未知函数 y , 根据 $u \equiv y/x$, 变换成 u 的函数,则成为变量分离形,解出它可得 u , 以 $y = ux$, 可得 y 。

9.3 解下列微分方程(式中除 x, t 以外均为常量)。

$$(a) \frac{d^2 x}{dt^2} + p^2 x = c \quad (b) \frac{d^2 x}{dt^2} + p^2 x = q \sin \omega t \quad (c) \frac{d^2 x}{dt^2} + 2b \frac{dx}{dt} + p^2 x = q \cos \omega t \quad (p^2 - b^2 > 0)$$

[提示] 将特解假设为简单的函数来求解,即对于(a),设 $x = A$ (常量),对于(b),设 $x = A \sin \omega t$, 对于(c),设 $x = A \cos \omega t + B \sin \omega t$, 由满足所得到的微分方程式而定出 A, B 。

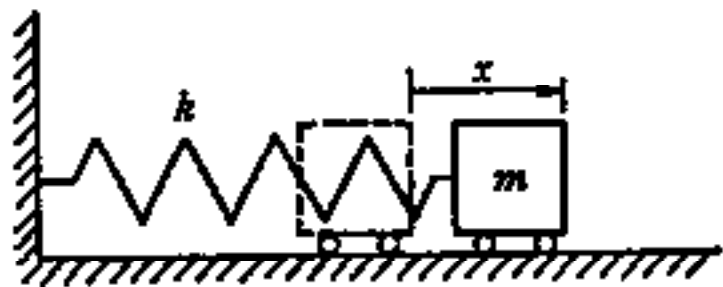


图 9.6

9.4 如图 9.6 所示,在由弹簧常数为 k 的弹簧和质量 m 的小物体所构成系统的振动中,应当满足物体的位移(从弹簧的自然长时开始的物体的位移量,向右为正) x 的微分方程,以时间为 t , 由

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx$$

给出。

(a) 试求此微分方程的通解。

(b) 在 $t=0$ 时,设 $x=x_0, dx/dt=v_0$ (式中, x_0, v_0 是常数,可称为初位移(initial displacement), 初速度(initial velocity))。由此定出特解中的任意常数,并求出满足这些初始条件的微分方程的解(位移)。

(c) 上个问题的解是 t 的周期函数。试求 t 的周期 T 。另外,试求单位时间(t 仅在 1 之间变

化)的振动次数(频率)。

9.5 如图 9.7 所示,如将非常细的、等截面的直杆,在杆的两端,用沿着杆截面的重心(形心)的力 P 压缩,则 P 达到某一值,杆就被压弯,把这个现象称为纵弯曲(buckling),而在纵弯曲方向的挠度 y (图 9.7)是坐标 x (图 9.7)的函数,满足微分方程式^①

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{P}{EI}y$$

在此, E 是杨氏模量,是由材料决定的常数, I 是截面的惯性矩,是由杆截面的形状和尺寸决定的常数。 EI 表示对于杆弯曲的抵抗的强度, EI 大的杆难以弯曲,被称为抗弯刚度(bending stiffness 或 flexural rigidity)

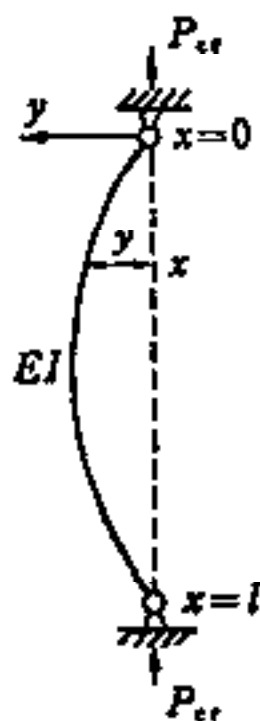


图 9.7

(a) 试求上述微分方程的通解。

(b) 如图所示,当杆长为 l 时, $x=0$ 和 $x=l$ 的挠度值 $(y)_{x=0}$, $(y)_{x=l}$ 均为零,在 $0 < x < l$ 中,试定出不让 $y \equiv 0$ 的 P 值。

(c) 试求上问中 P 不为零的最小值。

[注意] 对于本题,在通解中的两个任意常数里,一个定出,而另一个依旧未定。(c)的结果实际上是杆产生纵弯曲的荷载。

9.6 由材料力学,作用于梁的分布荷载的函数 $q(x)$ 和挠度 $y(x)$ 的关系是^②

$$EI \frac{d^4 y(x)}{dx^4} = q(x)$$



图 9.8

对于如图 9.8 那样放在弹性地板上的梁,因为弹性地板加在梁上的分布反力与挠度成比例,为 $q(x) = -ky(x)$,所以,弹性地板上梁的挠度微分方程成为

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} = -ky \quad (a)$$

但是,梁作为 $0 \leq x \leq \infty$ 的半无限梁,在 $x=0$ 处,受到图示的弯矩 M_0 和图示的荷载 P 的作用,其边界条件(boundary condition)由

$$EI \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)_{x=0} = -M_0 \quad EI \left(\frac{d^3 y}{dx^3} \right)_{x=0} = P$$

给出。另外,在全变域中,挠度 y 是有限的。试求满足以上各条件的微分方程(a)的解。

9.7 如图 9.9 所示,周边固定的圆板受到均布荷载为 q 的压力时的挠度 w ,是从圆板中心开始的距离 r 的函数 $w(r)$,满足下列微分方程^③

① 関谷,角:材料力学概要,いずみ書房(1971)P. 159.

② 関谷,角:前出 p. 122 EI 的含义与以上问题相同。

③ 竹内,関谷,わかる弹性学,日新出版(1974)P. 137.

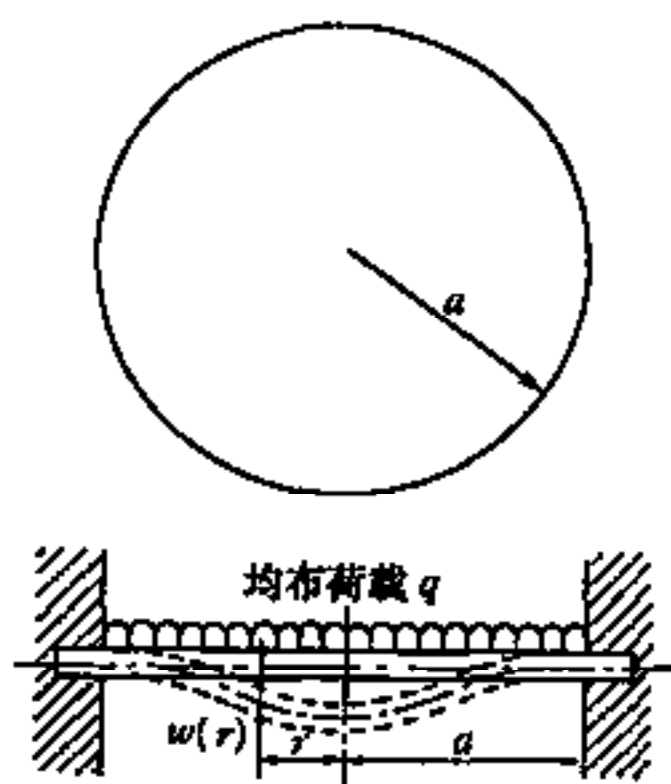


图 9.9

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[r \frac{d}{dr} \left\{ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right) \right\} \right] = \frac{q}{D} \quad (a)$$

D 是由板厚和板的材质所决定的常数。若将圆板的半径设为 a , 圆板全周边如图 9.9 所示被固定, 所以, 在 $r=a$ 处的边界条件:

$$(w)_{r=a}=0, (dw/dr)_{r=a}=0 \quad (b)$$

成立。另外, 平板的挠度 w 和其到 3 阶为止的导函数为有限。试求满足这各项条件的微分方程式 (a) 的解 $w(r)$, 并求其最大值 w_{max} 和其发生的位置 r 。

9.8 解变系数的 2 阶微分方程

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} - \frac{y}{x^2} = 0$$

[提示] 如设 $y=x^n$, 使之满足微分方程来决定 n 。

9.9 如图 9.10 所示, 刚体用水平向及铅直向的弹簧来支承, 设在其重心 O 受到位于水平的激振力 $Q \cos \omega t$ 、位于纸面内绕其垂直轴的激振力偶矩 $M \cos \omega t$ 的作用, 则 x 向的平动和在纸面内的转动的微分方程, 由

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + 2k_1(x+h\theta) = Q \cos \omega t$$

$$m\kappa^2 \frac{d^2 \theta}{dt^2} + 2k_1(x+h\theta)h + 2k_2 b^2 \theta = M \cos \omega t$$

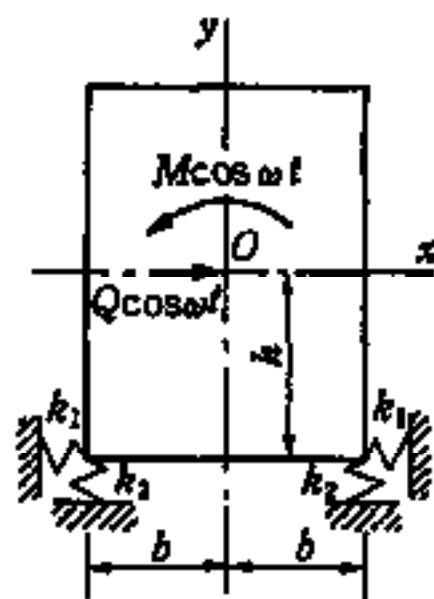


图 9.10

给出。

式中 k_1, k_2 ——如图 9.10 所示的弹簧常数

m ——刚体的总质量

θ, κ ——回转角和回转半径

x ——重心的 x 向位移

在实际问题中, 辅助解这项由于阻抗而衰减, 唯有强迫力和同周期的特解项保留。设

$$x = a \cos \omega t, \theta = b \cos \omega t$$

由满足原微分方程来决定 a, b , 求出特解。

9.10 将偏微分方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y)$$

称为泊松方程 (Poisson's equation)。在此 $u = u(x, y)$ 是未知函数, $f(x, y)$ 是已给出的已知函数。

这个偏微分方程式的通解可表示为与特解和拉普拉斯方程的通解之和相等的解。还有,特别地在 $f(x,y)=C$ (常量)时,由观察求出特解而求出泊松方程的通解。

第 10 章 变分法

10.1 函数与泛函

在变量 x 的变化域给出 x 的值,以某种法则来确定另一个变量 y 的值时称 y 为 x 的函数(function)。这时,给出数 x 确定数 y ,输入为数,输出也为数。

根据某种限制,给出函数集合中的一个函数 $y(x)$,再以某种法则确定变量 J 的值时, J 称为 $y(x)$ 的泛函(functional)。这时,给出函数 $y(x)$,确定数 J ,输入为函数,输出为数。其关系如图 10.1(a),(b)所示。虽然在微积分部分学习关于函数的极值问题,而对于变分法是处理泛函的极值问题。

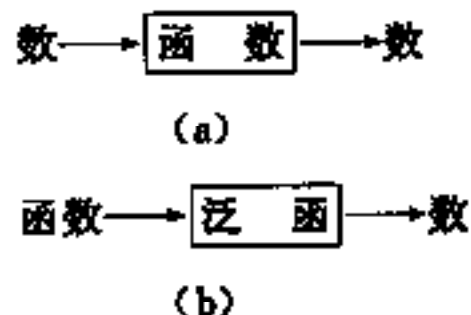


图 10.1 函数和泛函

10.2 泛函举例

曲线 $y=y(x)$ 在 $x=a, x=b$ 之间的长度 L 为

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + y'(x)^2} dx$$

当 $y(x)$ 是具体的泛函时,已有之可确定对应的数 L ,因而 L 是 $y(x)$ 的泛函。

还有, $0 \leq x \leq 10$ 的连续函数 $y(x)$,在 $x=5$ 的值 $y(5)$,也可给予函数 $y(x)$ 确定数 $y(5)$,故 $y(5)$ 是 $y(x)$ 的泛函。

10.3 欧拉方程

考察存在一阶导函数的函数 $y(x)$ 的泛函

$$J[y] = \int_a^b F(x, y(x), y'(x)) dx \quad (10.1)$$

由函数 $y(x)$ 所确定的数值 J 记作 $J[y]$ 如图 10.2。虽然函数 $y(x)$ 可出现各种各样的变化,但如图所示 $y(a), y(b)$ 的值不变,这时研究使 $J[y]$ 取极小值的函数 $y(x)$ 。现以解答的函数为 $y(x)$,与解答稍有不同的函数使用一个辅助变量 ϵ

$$\bar{y}(x) = y(x) + \epsilon \eta(x) \quad (10.2)$$

这一函数称为比较函数。这时,由上面的假定 $\bar{y}(a) = y(a), \bar{y}(b) = y(b)$ 或 $\eta(a) = \eta(b) = 0$

$=\eta(b)=0$ 以下进行的分析,对函数的连续性作以下的假设:

- (a) 函数 $F(x, y, y')$ 对 x, y, y' 二阶连续可微;
- (b) $y(x)$ 关于 x 二阶连续可微;
- (c) $\eta(x)$ 二阶连续可微。

以式(10.2)的 \bar{y} 代替式(10.1)的 y , 得到 $J[\bar{y}]$, 根据式(10.2), 显然是 ϵ 的函数, 故记为 $\Phi(\epsilon)$, $\epsilon=0$ 时 \bar{y} 即为正解 y , 因 y 是 $\Phi(\epsilon)=J[\bar{y}]$ 取得的极值点, 所以 $\Phi'(0)=0$ 。由微积分学的泰勒定理:

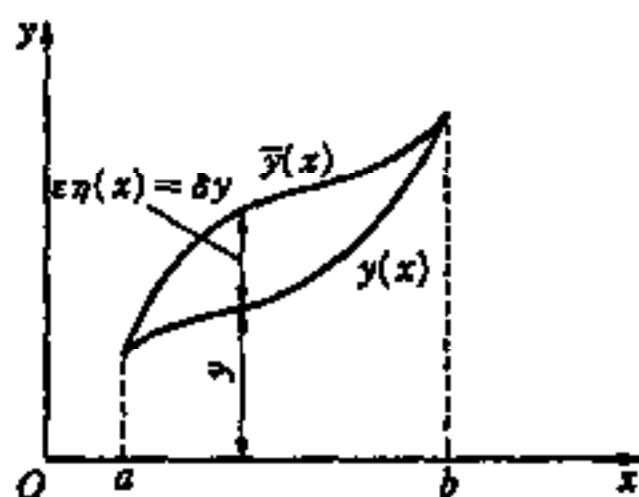


图 10.2 比较函数和变分

$$\Phi(\epsilon) = \Phi(0) + \epsilon \Phi'(0) + \frac{\epsilon^2}{2!} \Phi''(\theta\epsilon) \quad (10.3)$$

其中, $0 < \theta < 1$ 。

式(10.3)对 ϵ 求导

$$\begin{aligned} \Phi'(\epsilon) &= \frac{d}{d\epsilon} \int_a^b F(x, \bar{y}, \bar{y}') dx = \int_a^b \frac{\partial}{\partial \epsilon} F(x, \bar{y}, \bar{y}') dx \\ &= \int_a^b (F_{\bar{y}} \eta + F_{\bar{y}'} \eta') dx \end{aligned} \quad (10.4)$$

在此, 根据假设 $F_{\bar{y}} \eta + F_{\bar{y}'} \eta'$ 是连续的, 从而由于 $\left(\frac{\partial}{\partial \epsilon}\right) F(x, \bar{y}, \bar{y}')$ 是连续的积分外的 $(d/d\epsilon)$ 可放入积分号内(参照式(5.37))。

关于 $F_{\bar{y}}, F_{\bar{y}'}$, 即把 $(\partial/\partial \bar{y}) F(x, y, \bar{y}'), (\partial/\partial \bar{y}') F(x, \bar{y}, \bar{y}')$ 中所有的 \bar{y} 置为 y , $F_y, F_{y'}$, 即可得到 $(\partial/\partial y) F(x, y, y'), (\partial/\partial y') F(x, y, y')$ 。两式形式上相同, 仅是 y 与 \bar{y} 的不同。可是文字 \bar{y} 变为 y , 必须 $\epsilon=0$ 。所以

$$\Phi'(0) = \int_a^b (F_y \eta + F_{y'} \eta') dx \quad (10.5)$$

进一步由式(10.4)对 ϵ 求导

$$\begin{aligned} \Phi''(\epsilon) &= \frac{d}{d\epsilon} \int_a^b \frac{\partial}{\partial \epsilon} (F_{\bar{y}} \eta + F_{\bar{y}'} \eta') dx = \int_a^b \frac{\partial}{\partial \epsilon} (F_{\bar{y}} \eta + F_{\bar{y}'} \eta') dx \\ &= \int_a^b \{ (F_{\bar{y}\bar{y}} \eta + F_{\bar{y}\bar{y}'} \eta') \eta + (F_{\bar{y}'\bar{y}} \eta + F_{\bar{y}'\bar{y}'} \eta') \eta' \} dx \\ &= \int_a^b \{ F_{\bar{y}\bar{y}} \eta^2 + 2F_{\bar{y}\bar{y}'} \eta \eta' + F_{\bar{y}'\bar{y}'} \eta'^2 \} dx \end{aligned} \quad (10.6)$$

这里积分前的 $d/d\varepsilon$ 放入积分号内, 是由于如上式所示 $(F_{\bar{y}}\eta + F_{y'}\eta')$ 与 $F_{\bar{y}}\eta^2 + 2F_{\bar{y}y'}\eta\eta' + F_{y'y'}\eta'^2$ 相等, 因为后者由于最初所述的假设(a), (c)而连续, 故前者也是连续的(参照式(5.37))。

式(10.6)中以 $\theta\varepsilon$ 代 ε :

$$\Phi'(\theta\varepsilon) = \int_a^b \{ \tilde{F}_{\bar{y}}\eta^2 + 2\tilde{F}_{\bar{y}y'}\eta\eta' + \tilde{F}_{y'y'}\eta'^2 \} dx \quad (10.7)$$

这里 $\tilde{F}_{\bar{y}}$ 等以 $F_{\bar{y}}$ 等的 $y(x), y'(x)$ 代替 $y(x) + \theta\varepsilon\eta(x), y'(x) + \theta\varepsilon\eta'(x)$ ($0 < \theta < 1$)。这正好与 $F_{\bar{y}}$ 将 $F_{\bar{y}}$ 中 y 以 \bar{y} 置换结果相同。

式(10.5), (10.7)代入式(10.3)

$$\begin{aligned} \Phi(\varepsilon) = \Phi(0) + \varepsilon \int_a^b (F_{\bar{y}}\eta + F_{y'}\eta') dx \\ + \frac{\varepsilon^2}{2} \int_a^b (\tilde{F}_{\bar{y}}\eta^2 + 2\tilde{F}_{\bar{y}y'}\eta\eta' + \tilde{F}_{y'y'}\eta'^2) dx \end{aligned} \quad (10.8)$$

$\Phi(\varepsilon)$ 取极值的条件

$$\Phi'(0) = \int_a^b (F_{\bar{y}}\eta + F_{y'}\eta') dx = 0 \quad (10.9)$$

这式中含有 η 与 η' , 为全部变为 η , 上式第二项由分部积分变形为

$$\Phi'(0) = [F_{y'}\eta(x)]_a^b + \int_a^b \left(F_{\bar{y}} - \frac{d}{dx}F_{y'} \right) \eta(x) dx = 0 \quad (10.10)$$

由前面假设右边第一项消失

$$\int_a^b \left(F_{\bar{y}} - \frac{d}{dx}F_{y'} \right) \eta(x) dx = 0 \quad (10.11)$$

$\eta(x)$ 是在 $a \leq x \leq b$ 的二阶连续可微且在 $x=a, b$ 为零的任意函数, 式(10.11)成立, 以下面函数^①为例

$$\eta(x) = \begin{cases} (x-a)^2(\beta-x)^2 & (a < x < \beta) \\ 0 & (a \leq x \leq a, \beta \leq x \leq b) \end{cases} \quad (10.12)$$

现假设

$$G(x) = F_{\bar{y}} - \frac{d}{dx}F_{y'} \quad (10.13)$$

^① 为使 $\eta(x)$ 具有2阶连续导函数, 在式(10.12)上造出指数为3的函数。

在 $a < x < b$ 内点 $x = x_0$ 不为零, 即 $G(x_0) \neq 0$ 。为简便起见, 设 $G(x_0) > 0$ ($G(x_0) < 0$ 时完全可同样讨论)。由假设(a), (b), $G(x)$ 在 $x = x_0$ 连续, 故

$$\lim_{x \rightarrow x_0} G(x) = G(x_0)$$

即对任意的正数存在 δ , 使当 $|x - x_0| < \delta$ 时, 对应有 $|G(x) - G(x_0)| < \epsilon$, 或此时

$$-\epsilon < G(x) - G(x_0) < \epsilon$$

所以

$$G(x_0) - \epsilon < G(x) < G(x_0) + \epsilon$$

由于 $G(x_0) > 0$, 取任意 ϵ 使 $G(x_0) - \epsilon > 0$, 对应 $|x - x_0| < \delta$, 有

$$0 < G(x_0) - \epsilon < G(x)$$

因此, 对应 $-\delta < x - x_0 < \delta$ 即 $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$, 有 $G(x) > 0$ 。所以 α, β 若有 $x_0 - \delta < \alpha < \beta < x_0 + \delta$ 的选择, 在 $\alpha \leq x \leq \beta$ 上 $G(x) > 0$, 从而

$$\begin{aligned} \int_a^b G(x) \eta(x) dx &= \int_a^\alpha G(x) \eta(x) dx + \int_\alpha^\beta G(x) \eta(x) dx + \int_\beta^b G(x) \eta(x) dx \\ &= \int_\alpha^\beta G(x) \eta(x) dx > 0 \end{aligned}$$

这与式(10.11)矛盾。这一矛盾出于 $G(x_0) \neq 0$ 。若 $G(x_0) = 0$ 即无矛盾。因此 $a < x < b$ 间任意点 $G(x)$ 为零, 从而必须有

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0 \quad (10.14)$$

这是泛函 $J[y]$ 取得极值的必要条件, 称为欧拉方程(Euler's equation)。

得出函数 $\phi(\epsilon)$ 的 $\phi'(0) = 0$ 的条件式(10.14), 所谓 $\phi'(0) = 0$ 即 $\epsilon = 0$ 时 $\phi(\epsilon)$ 为极大、极小外, 还存在具有水平切线的积分曲线, 即 $\epsilon = 0$ 时, $\phi(\epsilon)$ 的变化一时停止, 在 $\epsilon = 0$ 近旁的值几乎可认为 $\phi(0)$ 没有变化, 这称函数 $\phi(\epsilon)$ 在 $\epsilon = 0$ 取平稳值(stationary value), 从而, 欧拉方程(10.14)是函数 $y(x)$ 为泛函 $J[y]$ 取平稳值的充分必要条件。

下面叙述经常在变分法使用的惯用记号。

上面的 $\epsilon \eta(x)$ 通常记作 δy (详记为 $\delta y(x)$, δy 是 x 的函数) 它称为 y 的变分(variation)。对式(10.2)两边求导

$$\overline{y'(x)} = y'(x) + \epsilon \eta'(x) \quad (10.15)$$

将上面的 $\epsilon \eta'(x)$ 记作 $\delta y'$ 。从而

$$\frac{d}{dx}(\delta y) = \frac{d}{dx}(\epsilon \eta(x)) = \epsilon \eta'(x) = \delta y' \quad (10.16)$$

还有式(10.8)的右边第二项

$$\epsilon \int_a^b (F_y \eta + F_{y'} \eta') dx$$

称为 J 的变分 δJ 或表示为 $\delta \int_a^b F(x, y, y') dx$, 即

$$\begin{aligned} \delta J &= \delta \int_a^b F(x, y, y') dx = \int_a^b (F_y \epsilon \eta + F_{y'} \epsilon \eta') dx \\ &= \int_a^b (F_y \delta y + F_{y'} \delta y') dx = \int_a^b (F_y \delta y + F_{y'} \frac{d}{dx} \delta y) dx \\ &= [F_{y'} \delta y]_a^b + \int_a^b \left(F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} \right) \delta y dx \\ &= \int_a^b \left(F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} \right) \delta y dx \end{aligned} \quad (10.17)$$

由式(10.9) $\delta J = 0$ ^①, 由于这式(10.17)得到前面所提到的欧拉方程(10.14)

[例 10.1] 过 x, y 平面内 A, B 两点的曲线 $y=y(x)$ 中求使其绕 x 轴旋转的旋转曲面面积取极小。其中, A, B 位于 x 轴的同侧。

解 点 A, B 的 x 坐标为 a, b , 题意的旋转面的表面积

$$S = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1+y'^2} dx$$

从而, 式(10.1)中的被积函数为

$$F(x, y, y') = y \sqrt{1+y'^2}$$

所以

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \sqrt{1+y'^2} \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{yy'}{\sqrt{1+y'^2}}$$

代入欧拉方程(10.14)

$$\sqrt{1+y'^2} - \frac{d}{dx} \left(\frac{yy'}{\sqrt{1+y'^2}} \right) = 0 \quad (a)$$

然而

^① 式(10.9)两边乘以常数 ϵ 即为 δJ 。

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(\frac{yy'}{\sqrt{1+y'^2}}\right) &= \frac{(y'^2 + yy'')\sqrt{1+y'^2} - yy''}{\sqrt{1+y'^2}} \\ &= \frac{(y'^2 + yy'')(1+y'^2) - yy'^2 y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}\end{aligned}\quad (b)$$

把式(b)代入式(a)

$$(1+y'^2)^2 - (y'^2 + yy'')(1+y'^2) + yy'^2 y'' = 0$$

$$\text{所以} \quad 1 + y'^2 - yy'' = 0 \quad (c)$$

令 $P \equiv y'$ 而 $y'' = p dp/dy$, 式(c)成为

$$1 + p^2 = yp \frac{dp}{dy}$$

从而

$$\frac{dy}{y} = \frac{p dp}{1+p^2}$$

两边积分

$$\log y = \frac{1}{2} \log(1+p^2) + \log c_1$$

其中, $\log c_1 =$ 积分常数 ($c_1 > 0$)

$$\text{所以} \quad \log y^2 = \log c_1^2 (1+p^2)$$

$$\left(\frac{y}{c_1}\right)^2 = 1+p^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \pm \sqrt{\left(\frac{y}{c_1}\right)^2 - 1}$$

$$\frac{c_1 dy}{\sqrt{y^2 - c_1^2}} = \pm dx$$

这里令

$$y = c_1 \cosh u$$

$$dy = c_1 \sinh u du$$

所以

$$\frac{c_1^2 \sinh u du}{\sqrt{c_1^2 (\cosh^2 u - 1)}} = \pm dx$$

$$c_1 du = \pm dx$$

$$u = (\pm x + c'_2)/c_1 = (x \pm c'_2)/(\pm c_1) (c'_2 = \text{积分常数})$$

所以

$$\operatorname{arcosh} \frac{y}{c_1} = \frac{x \pm c'_2}{\pm c_1}$$

因 \cosh 函数是偶函数, $\pm c_1$ 为 c_1 , 单记 $\pm c'_2$ 为 $-c_2$ 。

$$y = c_1 \cosh \frac{x - c_2}{c_1} \quad (\text{d})$$

这里, c_1, c_2 , 在式(d)的曲线图上, 通过点 A, B 而确定。

【注意】 以上的计算, 式(d)对所给的旋转面积的极大、极小的判定。以常识考虑为极小。

【问 10.1】 泛函

$$J[y] = \int_a^b F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) dx$$

导出其取得平稳值条件(欧拉方程)。其中, $x=a, x=b$ 时

$$\delta y = \delta y' = \dots = \delta y^{(n-1)} = 0$$

【例 10.2】 导出二个变量的函数 $u(x, y)$ 的泛函

$$J[u] = \iint_S F(x, y, u, u_x, u_y) dx dy \quad (10.18)$$

取得平稳值的条件(欧拉方程), 其中, S 为 x, y 平面的区域。在 S 的边界 C 上的 u 的值取所给定的值, $\delta u = 0$

$$[\text{解}] \quad \delta J = \iint_S (F_u \delta u + F_{u_x} \delta u_x + F_{u_y} \delta u_y) dx dy \equiv 0 \quad (\text{a})$$

由高斯定理(式 6.68))中令

$$f = F_{u_x} \delta u \quad g = F_{u_y} \delta u$$

$$\begin{aligned} & \iint_S \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (F_{u_x} \delta u) + \frac{\partial}{\partial y} (F_{u_y} \delta u) \right\} dx dy \\ &= \int_C \{ F_{u_x} \delta u \cos \langle \hat{x}, \hat{n} \rangle + F_{u_y} \delta u \cos \langle \hat{y}, \hat{n} \rangle \} ds \\ &\therefore \iint_S \left\{ F_{u_x} \delta u_x + F_{u_y} \delta u_y + \frac{\partial}{\partial x} (F_{u_x}) \delta u + \frac{\partial}{\partial y} (F_{u_y}) \delta u \right\} dx dy \\ &= \int_C \{ F_{u_x} \cos \langle \hat{x}, \hat{n} \rangle + F_{u_y} \cos \langle \hat{y}, \hat{n} \rangle \} \delta u ds \end{aligned}$$

边界 C 上 $\delta u = 0$ 右边消失, 左边的后二项移到右边

$$\begin{aligned} & \iint_s (Fu_x \delta u_x + Fu_y \delta u_y) dx dy \\ &= - \iint_s \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (Fu_x) + \frac{\partial}{\partial y} (Fu_y) \right\} \delta u dx dy \end{aligned} \quad (b)$$

将式(b)代入式(a)

$$\delta J = \iint_s \left\{ Fu - \frac{\partial}{\partial x} (Fu_x) - \frac{\partial}{\partial y} (Fu_y) \right\} \delta u dx dy \equiv 0$$

所以
$$Fu - \frac{\partial}{\partial x} (Fu_x) - \frac{\partial}{\partial y} (Fu_y) = 0 \quad (10.19)$$

上式为本问题对应的欧拉方程。

至此所解决的问题,边界上,函数 y, u 等的值取得指定值 \bar{y}, \bar{u} 等,也仅在边界上取同样指定值。从而,边界上 $\delta y = 0, \delta u = 0$ 如果在边界上值即使未被指定,所求函数也必须满足欧拉方程。究其原因,因比较函数 \bar{y}, \bar{u} ,在边界上取正解 y, u 在边界所取的同样值时得出欧拉方程。特别是边界值未指定时,以最初问题为例,将 $\delta J = 0$ 和欧拉方程代入式(10.17)(由 P. 183 第八行),与 δy 无关(欧拉方程与 δy 无关,由 y 所满足)

$$\begin{aligned} [F_y \delta y]_a^b &= 0 \\ [F_y \delta y]_{x=b} - [F_y \delta y]_{x=a} &= 0 \end{aligned}$$

其次, δy 除 $x=b$ 处为零外,其他任意时

$$[F_y]_{x=a} = 0 \quad (10.20)$$

δy 除 $x=a$ 处为零外其他任意时

$$[F_y]_{x=b} = 0 \quad (10.21)$$

因此,在此种情况,作为泛函 J 的极值条件,与欧拉方程(10.14)一起可得条件式(10.20),式(10.21),式(10.20),式(10.21)称为自然边界条件(natural boundary condition)。

最后,研究加上附带条件,泛函的平稳值取得的条件,例如附带条件:

$$G(x, y, z) = 0 \quad (10.22)$$

下,泛函

$$J[y, z] = \int_a^b F(x, y, y', z, z') dx \quad (10.23)$$

考察其取平稳值所求函数 $y(x), z(x)$ 的问题。在这种场合,用称为拉格朗日乘子(Lagrange multiplier)的 $\lambda(x)$,作如下函数:

$$F^*(x, y, y', z, z', \lambda) = F(x, y, y', z, z') + \lambda G(x, y, z) \quad (10.24)$$

作出这个函数后,可以不管附带条件(10.22)于是考察泛函

$$J^*[y, z, \lambda] = \int_a^b F^*(x, y, y', z, z', \lambda) dx \quad (10.25)$$

的平稳条件,得到

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F^*}{\partial y'} \right) - \frac{\partial F^*}{\partial y} &= 0 \\ \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F^*}{\partial z'} \right) - \frac{\partial F^*}{\partial z} &= 0 \\ G(x, y, z) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (10.26)$$

由这三个式子可确定 $y(x), z(x), \lambda(x)$ 。

10.4 Ritz 方法

上节中,叙述了泛函的平稳问题归结为解微分方程(欧拉方程)的处理。本节中相反地用关于近似解法的例题说明微分方程求解问题归结为泛函的平稳问题的处理。

【例 10.3】求在 x, y 平面内区域 S 内满足泊阿松方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = q \quad (q = \text{常数}) \quad (10.27)$$

边界 C 上 $u \equiv 0$ 的函数 $u = u(x, y)$ 。

【解】泊阿松方程(10.27),是泛函

$$J[u] = \iint_S \left[\frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right\} + qu \right] dx dy \quad (10.28)$$

的平稳问题的欧拉方程。事实上,泛函(10.28)即为前面所述的例 10.2 中

$$F(x, y, u, u_x, u_y) = \frac{1}{2} (u_x^2 + u_y^2) + qu$$

的情况,作出对应的欧拉方程(10.19)即成为:

$$q - \frac{\partial}{\partial x} u_x - \frac{\partial}{\partial y} u_y = 0$$

因而解边界 C 上 $u \equiv 0$ 的条件的微分方程(10.27),归结为求满足相同边界条件 $u \equiv 0$ 函数中泛函所取平稳值问题。

现在假设 u 在区域为直线 $x = \pm a, y = \pm a$ 所围正方形区域,边界条件满足 $u \equiv 0$ 的多项式。

$$u(x, y) = (x^2 - a^2)(y^2 - a^2) \sum_{m,n} a_{mn} x^m y^n \quad (10.29)$$

式(10.29)代入式(10.28)并进行定积分 $J[u]$ 是 a_{mn} 的二次式, 这里记作

$$J[u] = U(a_{00}, a_{10}, a_{01}, \dots) \quad (10.30)$$

根据 $J[u]$ 使 U 取平稳值的条件成为

$$\frac{\partial U}{\partial a_{00}} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial a_{10}} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial a_{01}} = 0, \dots \quad (10.31)$$

式(10.31)是 $a_{00}, a_{10}, a_{01}, \dots$ 一次型, 是 $a_{00}, a_{10}, a_{01}, \dots$ 为未知数的联立一次方程组, 解之, 确定出 $a_{00}, a_{10}, a_{01}, \dots$, 代入式(10.29)得到 $u(x, y)$ 的近似解。

事实上微分方程中以 $-x$ 代 x , 以 $-y$ 代 y 微分方程不变。并且边界上值的分布 $u \equiv 0$ 对称于 x, y 轴, 故 m, n 的和取 $0, 2, 4, \dots$ 的偶数。首先在最简单的取 $m = n = 0$ 情况下, 式(10.29)为:

$$u(x, y) = a_{00}(x^2 - a^2)(y^2 - a^2) \quad (10.32)$$

由它进行上面所作定积分求 a_{00} , 得

$$a_{00} = -\frac{5}{16} \cdot \frac{q}{a^2} \quad (10.33)$$

将它代入式(10.30)求 $u(x, y)$, 得到 $u(x, y)$ 的一次近似。其次增之二次

$$u(x, y) = (x^2 - a^2)(y^2 - a^2)(a_{00} + a_{20}x^2 + a_{02}y^2) \quad (10.34)$$

由于式(10.27)的边界条件对 x, y 交换不变, 因此, x, y 为对称, $a_{20} = a_{02}$, 由此 a_{02} 变为 a_{20} 。将式(10.32)代入式(10.28)进行定积分得

$$J[u] = U(a_{00}, a_{20}) \quad (10.35)$$

根据其平稳条件

$$\frac{\partial U}{\partial a_{00}} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial a_{20}} = 0 \quad (10.36)$$

得到以 a_{00}, a_{20} 为未知数的联立二元一次代数方程式, 解之得到 a_{00} 和 a_{20} 的近似值

$$\left. \begin{aligned} a_{00} &= -\frac{5259}{16554} \cdot \frac{q}{a^2} \\ a_{20} &= a_{02} = -\frac{525}{8864} \cdot \frac{q}{a^2} \end{aligned} \right\} \quad (10.37)$$

将其上式代入式(10.34)得到 $u(x, y)$ 的二次近似。以下式(10.29)的右边的项数越

增加精度就越高,计算的步数也越增多。

以上所述的例 10.3 的近似解法称为黎兹方法(Ritz method)所给微分方程的边界问题设定为对应的泛函的平稳问题时,用类似例 10.3 的分析处理。

其次实际问题中出现的二三个微分方程,表示为边界条件对应的泛函问题 10.3。

习题 10

10.1 导出 $u=u(x), v=v(x), \dots$ 多个函数所确定的泛函取得平稳值条件(欧拉方程),其中 $x=a, b$ 时

$$\begin{aligned}\delta u &= \delta v = \dots = 0 \\ \delta u' &= \delta v' = \dots = 0\end{aligned}$$

[提示] $\delta u, \delta v, \dots$ 中只在 $a < x < \beta$ 上 $(x-a)^3(\beta-x)^3, a \leq x \leq a$ 及 $\beta \leq x \leq b$ 为 0, 其他为 0。

10.2 例 10.2 中,在 S 的边界上存在没有给出 u 的部分的时候,求其自然边界条件。

10.3 试证明表 10.1 所示微分方程式的边界值问题,可以作为对应的泛函 $J[u]$ 的平稳问题来处理。

表 10-1 边界值问题和泛函

边界值问题		泛函 $J[u]$
微分方程	边界条件	
$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$	$\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u = 0$ (n 是边界法线方向 $\sigma =$ 常数)	$\iint_S \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy + \int_C \sigma u^2 ds$
$\frac{\partial}{\partial x} \left\{ p(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ p(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} \right\} + q(x, y) u = 0$ $p, q =$ 已知函数	$p(x, y) \left(\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u \right) = 0$ (n, σ 与上式相同)	$\iint_S \left[P(x, y) \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right\} - q(x, y) u^2 \right] dx dy + \int_C p(x, y) \sigma u^2 ds$
$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = q(x, y)$	w 和 $\frac{\partial w}{\partial n}$ 给定或者所给的 w 满足 $\nabla^2 w = 0$	$\iint_S \left\{ \frac{1}{2} (\nabla^2 w)^2 - w q(x, y) \right\} dx dy$

第11章 数值分析法

11.1 绪言

直到上一章为止,将给出的问题,由采用文字记号的式,即解析式的运算来处理,答案也以解析式而得出。如有必要,在其答案的解析解的文字记号中代入数值,就求出必要的数值,也能够作成图表和数表。

在本章,叙述即使得不到问题的解析精确解,也可求得具有必要解的数值或用数值计算得出的数值系数的解析近似解的方法,即关于数值分析(numerical analysis)的几个手法。此种解析一般需超大量的计算,但由于计算机的出现,超大量计算也为可能。

在本章,将着重讨论偏微分方程的边界值问题。首先,叙述的是在区域内设定未知数的区域型解法——有限元法(finite element method, FEM)和差分法(finite difference method, FDM),最后,叙述的是仅以边界上的节点设为未知数的边界型解法——边界元法(boundary element method, BEM)和电荷模拟法(charge simulation)。

11.2 有限元法

在此,说明以 u 为未知函数的二元泊松偏微分方程式

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= q(x, y) \\ q(x, y) &= \text{已知函数} \end{aligned} \right\} \quad (11.1)$$

根据在上一章所举例 10.3, 这个问题, 作为泛函

$$J[u] = \iint_S \left[\frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right\} + qu \right] dx dy \quad (11.2)$$

的驻值(平稳值)(译者注)问题来处理^①。在此 S 是所处理的 x, y 面内的区域。把这个区域(如图 11.1 所示)近似地分割为许多小的三角形单元。以其中的一个单元 Δ_{ijk} 为代表取出, 这个单元内的 u 的变化为平面的(1 次函数), 将 a_1, a_2, a_3 设为常

^① 对于例 10.3 为 $q=\text{常数}$, 但是一般地, q 即使是 x, y 的已知函数, 仍然可以用这个泛函。

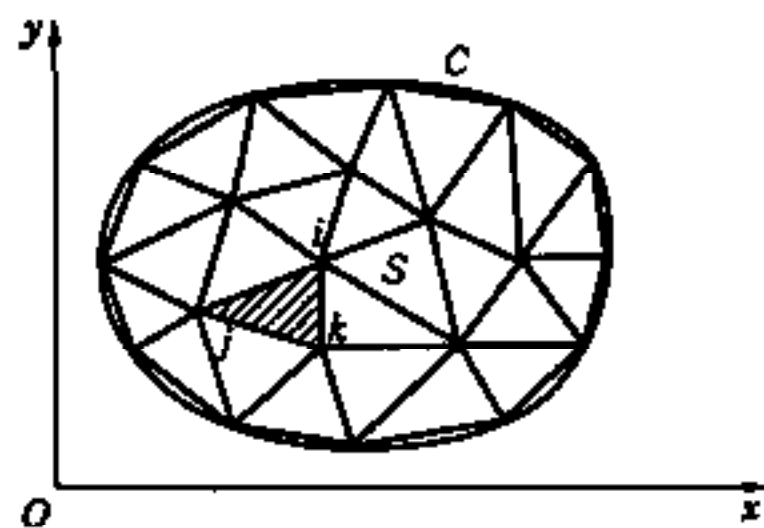


图 11.1 区域 S 内有
有限个单元的分割

数, 则

$$u = a_1 + a_2 x + a_3 y \quad (11.3)$$

这些 a_1, a_2, a_3 是 Δijk 的顶点, 式 (11.3) 的 u 和在 i, j, k 中的 u 的值 u_i, u_j, u_k 保持一致来决定。即这个一致的条件, 设 i, j, k 的坐标为 $(x_i, y_i), (x_j, y_j), (x_k, y_k)$, 有

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 x_i + a_3 y_i &= u_i \\ a_1 + a_2 x_j + a_3 y_j &= u_j \\ a_1 + a_2 x_k + a_3 y_k &= u_k \end{aligned} \quad (11.4)$$

如解这个式, 是以 a_1, a_2, a_3 为未知量的三元一次联立方程式

$$a_1 = \frac{\begin{vmatrix} u_i & x_i & y_i \\ u_j & x_j & y_j \\ u_k & x_k & y_k \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{vmatrix}} = \frac{1}{2\Delta} \begin{Bmatrix} u_i(x_j y_k - x_k y_j) \\ + u_j(x_k y_i - x_i y_k) \\ + u_k(x_i y_j - x_j y_i) \end{Bmatrix} \quad (11.5a)$$

$$a_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & u_i & y_i \\ 1 & u_j & y_j \\ 1 & u_k & y_k \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{vmatrix}} = \frac{1}{2\Delta} \begin{Bmatrix} u_i(y_j - y_k) \\ + u_j(u_k - y_i) \\ + u_k(y_i - y_j) \end{Bmatrix} \quad (11.5b)$$

$$a_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & x_i & u_i \\ 1 & x_j & u_j \\ 1 & x_k & u_k \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{vmatrix}} = \frac{1}{2\Delta} \begin{Bmatrix} u_i(x_k - x_j) \\ + u_j(x_i - x_k) \\ + u_k(x_j - x_i) \end{Bmatrix} \quad (11.5c)$$

式中

$$2\Delta \equiv \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{vmatrix} \quad (11.6)$$

在此,如设

$$\left. \begin{aligned} a_i &\equiv x_j y_k - x_k y_j, & a_j &\equiv x_k y_i - x_i y_k \\ a_k &\equiv x_i y_j - x_j y_i, & b_i &\equiv y_j - y_k \equiv y_{jk} \\ b_j &\equiv y_k - y_i \equiv y_{ki}, & b_k &\equiv y_i - y_j \equiv y_{ji} \\ c_i &\equiv x_k - x_j \equiv x_{kj}, & c_j &\equiv x_i - x_k \equiv x_{ki} \\ c_k &\equiv x_j - x_i \equiv x_{ji} \end{aligned} \right\} \quad (11.7)$$

代入式(11.5),得

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= (u_i a_i + u_j a_j + u_k a_k) / 2\Delta \\ \alpha_2 &= (u_i b_i + u_j b_j + u_k b_k) / 2\Delta \\ \alpha_3 &= (u_i c_i + u_j c_j + u_k c_k) / 2\Delta \end{aligned} \right\} \quad (11.8)$$

将式(11.8)代入式(11.3),得

$$u = \frac{1}{2\Delta} \{ (a_i + b_i x + c_i y) u_i + (a_j + b_j x + c_j y) u_j + (a_k + b_k x + c_k y) u_k \} \quad (11.9)$$

于是,如设

$$\left. \begin{aligned} N_i &\equiv (a_i + b_i x + c_i y) / 2\Delta \\ N_j &\equiv (a_j + b_j x + c_j y) / 2\Delta \\ N_k &\equiv (a_k + b_k x + c_k y) / 2\Delta \end{aligned} \right\} \quad (11.10)$$

将式(11.10)代入到式(11.9)中,得

$$u = [N_i \quad N_j \quad N_k] \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_k \end{Bmatrix} \quad (11.11)$$

另外,若设

$$\{u\}_e \equiv \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_k \end{Bmatrix} \quad (11.12)$$

那么

$$u = [N_i \quad N_j \quad N_k] \{u\}, \quad (11.13)$$

$J[u]$ 的右边是区域 S 上的积分,但是, S 如图 11.1 所示作为许多三角形单元的和被近似地表示出来^①,因此式(11.2)的右边用各个三角形单元的积分之和,被近似地求出。如用式(11.2)的积分,将一个单元 S_e 上的积分作为 $J_e[u]$,则将 S_e 作为 Δ_{ijk}

$$J_e = \iint_{S_e} \left[\frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right\} + qu \right] dx dy \quad (11.14)$$

在式(11.14)中代入式(11.9)或式(11.11)或式(11.13),在 S_e 上进行定积分, J_e 就成为 u_i, u_j, u_k 的函数。所以,对于 u_i 的 J_e 偏导数为

$$\frac{\partial J_e}{\partial u_i} = \iint_{S_e} \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial u_i} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial}{\partial u_i} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) + q \frac{\partial u}{\partial u_i} \right\} dx dy \quad (11.15)$$

由式(11.9)

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{1}{2\Delta} (b_i u_i + b_j u_j + b_k u_k) \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{1}{2\Delta} (c_i u_i + c_j u_j + c_k u_k) \end{aligned} \right\} \quad (11.16)$$

所以

$$\frac{\partial}{\partial u_i} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{b_i}{2\Delta}, \quad \frac{\partial}{\partial u_i} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{c_i}{2\Delta} \quad (11.17)$$

又由式(11.9)

$$\frac{\partial u}{\partial u_i} = \frac{1}{2\Delta} (a_i + b_i x + c_i y) \quad (11.18)$$

如将式(11.16),式(11.17),式(11.18)代入到式(11.15)中,得

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_e}{\partial u_i} &= \iint_{S_e} \left\{ \frac{1}{2\Delta} (b_i u_i + b_j u_j + b_k u_k) \cdot \frac{b_i}{2\Delta} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2\Delta} (c_i u_i + c_j u_j + c_k u_k) \cdot \frac{c_i}{2\Delta} + q \cdot \frac{1}{2\Delta} (a_i + b_i x + c_i y) \right\} dx dy \\ &= \frac{1}{4\Delta^2} \iint_{S_e} ([b_i b_j b_k] \{u\}_e b_i + [c_i c_j c_k] \{u\}_e c_i) dx dy \end{aligned}$$

^① 区域的边界是曲线时,如将区域用三角形单元划分时,则边界的曲线近似为三角形边线的连接(折线)。

$$+\frac{1}{2\Delta}\iint_{s_i} q(a_i+b_ix+c_iy)dx dy \quad (11.19a)$$

对 $\partial J_e/\partial u_i, \partial J_e/\partial u_j, \partial J_e/\partial u_k$ 作同样处理, 得到下列式。

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_e}{\partial u_j} &= \frac{1}{4\Delta^2} \iint_{s_i} ([b_ib_jb_k]\{u\}_ib_j + [c_ic_kc_k]\{u\}_ic_j) dx dy \\ &+ \frac{1}{2\Delta} \iint_{s_i} q(a_j+b_jx+c_jy) dx dy \end{aligned} \quad (11.19b)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_e}{\partial u_k} &= \frac{1}{4\Delta^2} \iint_{s_i} ([b_ib_jb_k]\{u\}_ib_k + [c_ic_kc_k]\{u\}_ic_k) dx dy \\ &+ \frac{1}{2\Delta} \iint_{s_i} q(a_k+b_kx+c_ky) dx dy \end{aligned} \quad (11.19c)$$

于是, 如将 $\partial J_e/\partial u_i, \partial J_e/\partial u_j, \partial J_e/\partial u_k$ 作为元素列向量表示成 $\{\partial J/\partial u\}_e$ 的话, 则

$$\left\{ \frac{\partial J}{\partial u} \right\}_e = \begin{Bmatrix} \partial J_e/\partial u_i \\ \partial J_e/\partial u_j \\ \partial J_e/\partial u_k \end{Bmatrix} \quad (11.20)$$

这是与三角形单元 ijk 相关的量。因为式(11.19)右边第 1 项的被积函数即()内的是常数, 如果将()拿到积分号外, 则这个积分简单地变为

$$\iint_{s_i} dx dy = \Delta \quad (11.21)$$

式(11.19)右边的第二项, 在各单元中均将 q 假定为常量, 如作阶梯函数的近似, 就为

$$\left. \begin{aligned} F_i &\equiv \frac{q}{2\Delta} \iint_{s_i} (a_i+b_ix+c_iy) dx dy \\ F_j &\equiv \frac{q}{2\Delta} \iint_{s_i} (a_j+b_jx+c_jy) dx dy \\ F_k &\equiv \frac{q}{2\Delta} \iint_{s_i} (a_k+b_kx+c_ky) dx dy \end{aligned} \right\} \quad (11.22)$$

在此, 如将 Δ_{ijk} 的重心设为 (\bar{x}, \bar{y}) , 则为

$$\bar{x} = \iint_{s_i} x dx dy / \Delta$$

$$\bar{y} = \iint_{s_i} y dx dy / \Delta$$

或

$$\iint_{s_i} x dx dy = \bar{x} \Delta, \quad \iint_{s_i} y dx dy = \bar{y} \Delta \quad (11.23)$$

将式(11.21), 式(11.23)代入到式(11.22)

$$\begin{aligned} F_i &= \frac{2}{2\Delta} (a_i \iint_{s_i} dx dy + b_i \iint_{s_i} x dx dy + c_i \iint_{s_i} y dx dy) \\ &= \frac{q}{2\Delta} (a_i \Delta + b_i \bar{x} \Delta + c_i \bar{y} \Delta) = \frac{q}{2} (a_i + b_i \bar{x} + c_i \bar{y}) \end{aligned} \quad (11.24)$$

另外, Δ_{ijk} 的重心坐标由

$$\left. \begin{aligned} \bar{x} &= (x_i + x_j + x_k) / 3 \\ \bar{y} &= (y_i + y_j + y_k) / 3 \end{aligned} \right\} \quad (11.25)$$

给出。如将式(11.7), (11.25)代入到式(11.24)并计算, 得

$$\begin{aligned} F_i &= \frac{q}{2} \{ (x_j y_k - x_k y_j) + (y_j - y_k)(x_i + x_j + x_k) / 3 + (x_k - x_j)(y_i + y_j + y_k) / 3 \} \\ &= \frac{q}{6} \{ (x_j y_k - x_k y_j) + (x_k y_i - x_i y_k) + (x_i y_j - x_j y_i) \} \\ &= \frac{q}{6} \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{vmatrix} = \frac{q\Delta}{3} \end{aligned} \quad (11.26a)$$

同理

$$F_j = F_k = \frac{q\Delta}{3} \quad (11.26b)$$

将以上的汇总, 为

$$\{F\}_e = \begin{Bmatrix} F_i \\ F_j \\ F_k \end{Bmatrix} = \frac{q\Delta}{3} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (11.27)$$

根据以上这些, 在式(11.19)中代入式(11.21), 式(11.22), 式(11.26), 有

$$\frac{\partial J_e}{\partial u_i} = \frac{1}{4\Delta} [b_i^2 + c_i^2, b_j b_i + c_j c_i, b_k b_i + c_k c_i] \{u\}_e + \frac{q\Delta}{3} \quad (11.28)$$

有关另外的 $\partial J_e / \partial u_j, \partial J_e / \partial u_k$ 也是同样处理, 如汇总这些, 则由式(11.20), $\{\partial J / \partial u\}_e$ 为

$$\{\partial J / \partial u\}_e = [h] \{u\}_e + \{F\}_e \quad (11.29)$$

式中

$$[h] = \frac{1}{4\Delta} \begin{bmatrix} b_i^2 + c_i^2 & b_j b_i + c_j c_i & b_k b_i + c_k c_i \\ b_i b_j + c_i c_j & b_j^2 + c_j^2 & b_k b_j + c_k c_j \\ b_i b_k + c_i c_k & b_j b_k + c_j c_k & b_k^2 + c_k^2 \end{bmatrix} \quad (11.30)$$

$\{F\}_e$ 由式(11.27)给出。

式(11.2)右边的积分是区域内各单元的积分之和, 这些根据对各单元节点 u 的值 u_i , 将偏微分后的式设为零作为最小条件, 可求出一切节点 u 的值 u_i 。譬如对节点 i 求解, 就有

$$\frac{\partial J[u]}{\partial u_i} = \sum \frac{\partial J_e}{\partial u_i} = 0 \quad (11.31)$$

在此, \sum 意味着以 i 为顶点有关一切单元的合计。在式(11.31)中代入式(11.28), 得

$$\frac{\partial J[u]}{\partial u_i} = \sum \frac{1}{4\Delta} [b_i^2 + c_i^2, b_j b_i + c_j c_i, b_k b_i + c_k c_i] \{u\}_e + \sum \frac{q\Delta}{3} = 0 \quad (11.32)$$

在此, Δ, q 一般地在 \sum 中各项均不同。如在区域内部的节点上列出式(11.32)那样的式, 则这些的方程式可有与内部节点的个数相同的个数, 以这些节点的 u 值为未知数, 这个总数也是相同的。在边界上的节点的 u 值, 由边界条件作为已知。所以式(11.32)是方程数和未知数个数相同的联立 1 次方程式。解此方程式, 就可求出各节点的 u 值 u_i, u_j, u_k, \dots , 任意点的 u 可从式(11.9)求出, 其偏导数可由式(11.16)求出。

11.3 差分法

差分法作为区域型的数值分析法, 是比有限元法还早就已采用了的方法。

函数 $y=f(x)$ 的导数, 由

$$f'(x) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{f(x+\delta) - f(x)}{\delta} \quad (11.33)$$

给出。 $\delta \approx 0$ 时, 可近似地看作

$$f'(x) \approx \frac{f(x+\delta) - f(x)}{\delta} \quad (11.34)$$

如考虑比这能稍许提高精度的式子是

$$f'(x) \approx \frac{f(x+\delta) - f(x-\delta)}{2\delta} \quad (11.35)$$

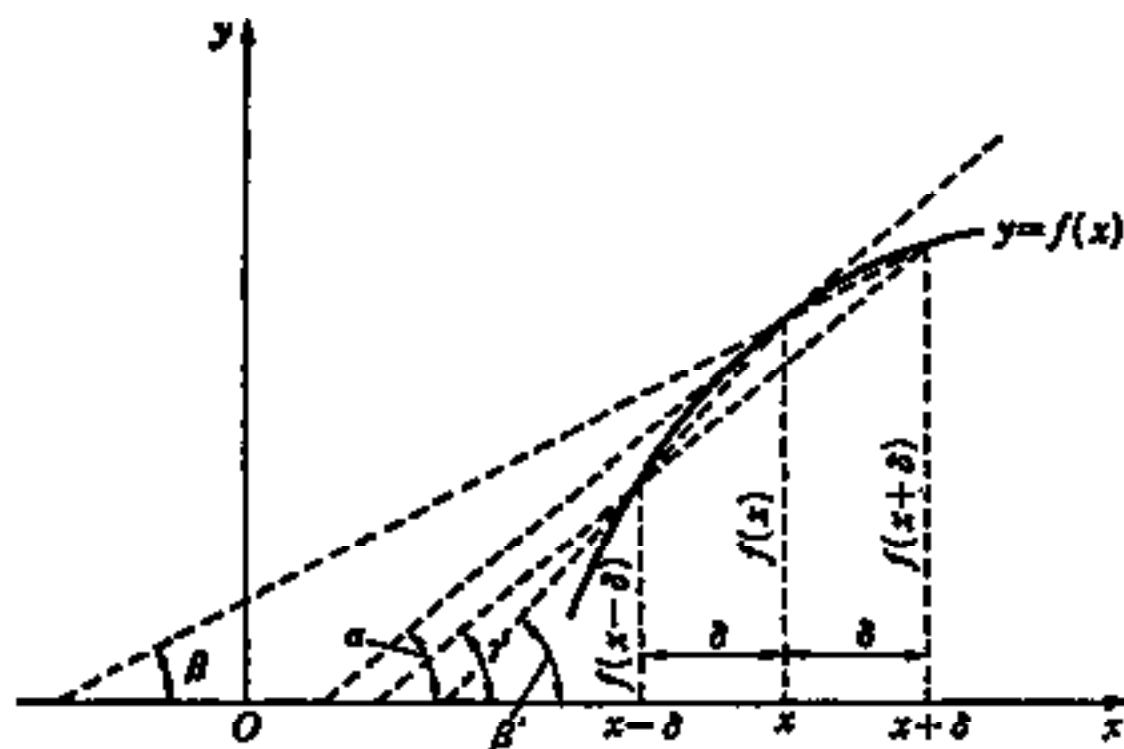


图 11.2 导数(微分商)和差分商

在图 11.2 中, 式(11.33)表示为 $\tan \alpha$, 式(11.34)表示为 $\tan \beta$, 式(11.35)表示为 $\tan \gamma$, 但是看到 γ 比 β 更接近 α , 可以认为式(11.35)比式(11.34)精度更高。

[问 11.1] 将式(11.34), 式(11.35)右边的 $f(x+\delta)$, $f(x-\delta)$ 以点 x 为中心作泰勒展开后, 再代入这些式的右边, 通过研究右边和左边的差(差分表示的误差)是微小量 δ 的几次方, 试比较两差分表示

的精度^①。

接着, 求 2 阶导数的差分表示, 首先作

$$f''(x) = \frac{d}{dx} f'(x) \approx \frac{f'(x+(\delta/2)) - f'(x-(\delta/2))}{2 \times (\delta/2)} \quad (11.36)$$

在此, 在式(11.35)中, 用 f' 替代了 f , $\delta/2$ 替代了 δ 。进一步地有

$$f'\left(x + \frac{\delta}{2}\right) \approx \frac{f(x+\delta) - f(x)}{2 \times (\delta/2)} \quad (11.37)$$

$$f'\left(x - \frac{\delta}{2}\right) \approx \frac{f(x) - f(x-\delta)}{2 \times (\delta/2)} \quad (11.38)$$

式(11.37)是用 $x+(\delta/2)$ 替代了式(11.35)中的 x , $\delta/2$ 替代了 δ , 式(11.38)是用 $x-(\delta/2)$ 替代了式(11.35)中的 x , $\delta/2$ 替代了 δ 。将式(11.37), 式(11.38)代入式(11.36)得到 2 阶导数的差分, 表示为:

$$f''(x) \approx \frac{f(x+\delta) - 2f(x) + f(x-\delta)}{\delta^2} \quad (11.39)$$

① 竹内, 関谷, わかる弾性学, 日新出版(1974), p. 168.

偏导数的差分表示也是完全相同的

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, y) &\approx \frac{u(x+\delta, y) - 2u(x, y) + u(x-\delta, y)}{\delta^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} u(x, y) &\approx \frac{u(x, y+\delta) - 2u(x, y) + u(x, y-\delta)}{\delta^2} \end{aligned} \right\} \quad (11.40)$$

因此, 将式(11.40)的第 1, 第 2 式两边分别相加, 得

$$\nabla^2 u(x, y) \approx \frac{1}{\delta^2} \{u(x+\delta, y) + u(x-\delta, y) + u(x, y+\delta) + u(x, y-\delta) - 4u(x, y)\} \quad (11.41)$$

由以上, 譬如泊松方程式(11.1), 在其左边代入到式(11.41)中, 得到的差分方程式为

$$\frac{1}{\delta^2} \{u(x+\delta, y) + u(x-\delta, y) + u(x, y+\delta) + u(x, y-\delta) - 4u(x, y)\} \approx q(x, y) \quad (11.42)$$

【例 11.1】如图 11.3 所示的正方形平板, 周边是简支, 受均布荷重 q 时的挠度 w , 对区域内任意点, 其泊松方程式(bi-Poisson equation)为

$$\nabla^4 w = \nabla^2 \nabla^2 w = \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D} \quad (11.43)$$

式中, D = 平板的抗弯刚度, 并且在正方形平板的周边上满足边界条件^①

$$w=0, \nabla^2 w=0 \quad (11.44)$$

对于图 11.3 的格子, 试由差分法, 求格子内点的挠度。

【解】将微分方程式(11.43)分解成下列的两个联立方程式。

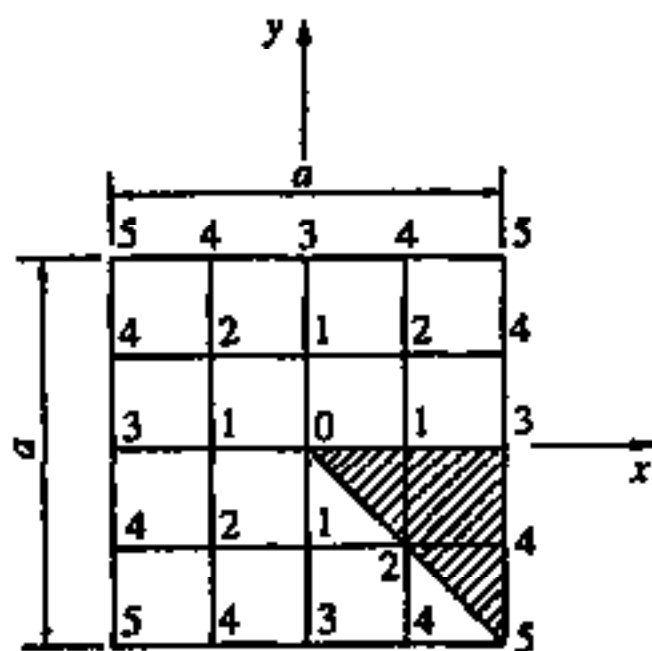


图 11.3 受均布荷重的四周简支的正方形平板

^① 譬如, 在 $x=(\text{定值})$ 的边上, $w=0$, 弯矩 $=M_x = -D\{\partial^2 w/\partial x^2\} + \nu(\partial^2 w/\partial y^2) = 0$. (a) 然而, 在这个边上到处都是 $w=0$, 所以沿此边方向的偏导数 $\partial w/\partial y=0 \therefore \partial^2 w/\partial y^2=0$ (b) 将式(b)代入到式(a), $\partial^2 w/\partial x^2=0$ (c) 由(b)+(c), $\nabla^2 w=0$.

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 w &= \frac{-M}{D} \\ \nabla^2 M &= -q \end{aligned} \right\} \quad (11.45)$$

在边界上^①,有

$$\left. \begin{aligned} w &= 0 \\ M &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (11.46)$$

故首先将 $M=0$ 作为边界条件,求解 $\nabla^2 M = -q$,将结果 M 代入 $\nabla^2 w = -M/D$ 的右边在边界条件 $w=0$ 的基础上求解即可。

在正方形区域中 x, y 两轴和直线 $x=y$ 是对称的,荷重分布也是均布荷重,因为对称于这些直线,所以在图 11.3 中,同编号的格子点的 w 或 M 各自相等。

如将式(11.45)置换成差分方程式,则

$$w(x+\delta, y) + w(x-\delta, y) + w(x, y+\delta) + w(x, y-\delta) - 4w(x, y) = -\delta^2 M/D \quad (11.47)$$

$$M(x+\delta, y) + M(x-\delta, y) + M(x, y+\delta) + M(x, y-\delta) - 4M(x, y) = -\delta^2 q \quad (11.48)$$

如将这些应用到图 11.3 的格子点分配上,设 $\delta=a/4$,首先 M 的差分方程式(11.48)对于各格子点(M 的下标表示所研究 M 格子点的编号),有

$$\begin{aligned} 4M_1 - 4M_0 &= -qa^2/16 \\ 2M_2 - 4M_1 + M_0 &= -qa^2/16 \\ -4M_2 + 2M_1 &= -qa^2/16 \end{aligned}$$

由这些得

$$M_0 = \frac{9}{2} \cdot \frac{qa^2}{64}, M_1 = \frac{7}{2} \cdot \frac{qa^2}{64}, M_2 = \frac{11}{4} \cdot \frac{qa^2}{64}$$

将这些代入对 w 的差分方程式(11.47)的右边,得

$$\begin{aligned} 4w_1 - 4w_0 &= -9N/2 \\ 2w_2 - 4w_1 + w_0 &= -7N/2 \\ -4w_2 + 2w_1 &= -11N/4 \end{aligned}$$

在此

^① 由式(11.45), $M = -D\nabla^2 w$, 在边界上, 由式(11.44), $\nabla^2 w = 0$, $\therefore M = 0$

$$N = qa^4 / 1024D$$

根据这些式,可得到以下挠度的值。

$$w_0 = \frac{66}{16}N, w_1 = \frac{48}{16}N, w_2 = \frac{35}{16}N$$

中心点 O 的挠度为

$$w_0 = \frac{66}{16}N = \frac{66}{16} \times \frac{qa^4}{1024D} = 0.00403 \frac{qa^4}{D}$$

此值与解析解 $w_0 = 0.00406qa^4/D$ 相比较,误差不到 1%。

用以上的做法,可将偏微分方程式变换成差分方程式,求解问题。将这样的方法称为差分法(finite difference method, 简记为 FDM)。

接着,将实用的重要的偏导数的几个差分表示的系数在图 11.4 中表示出来。将这些称为系数星(weight star)。因为 $\nabla^2 f, \nabla^4 f$ 等图如星的形状,所以起这个名称。

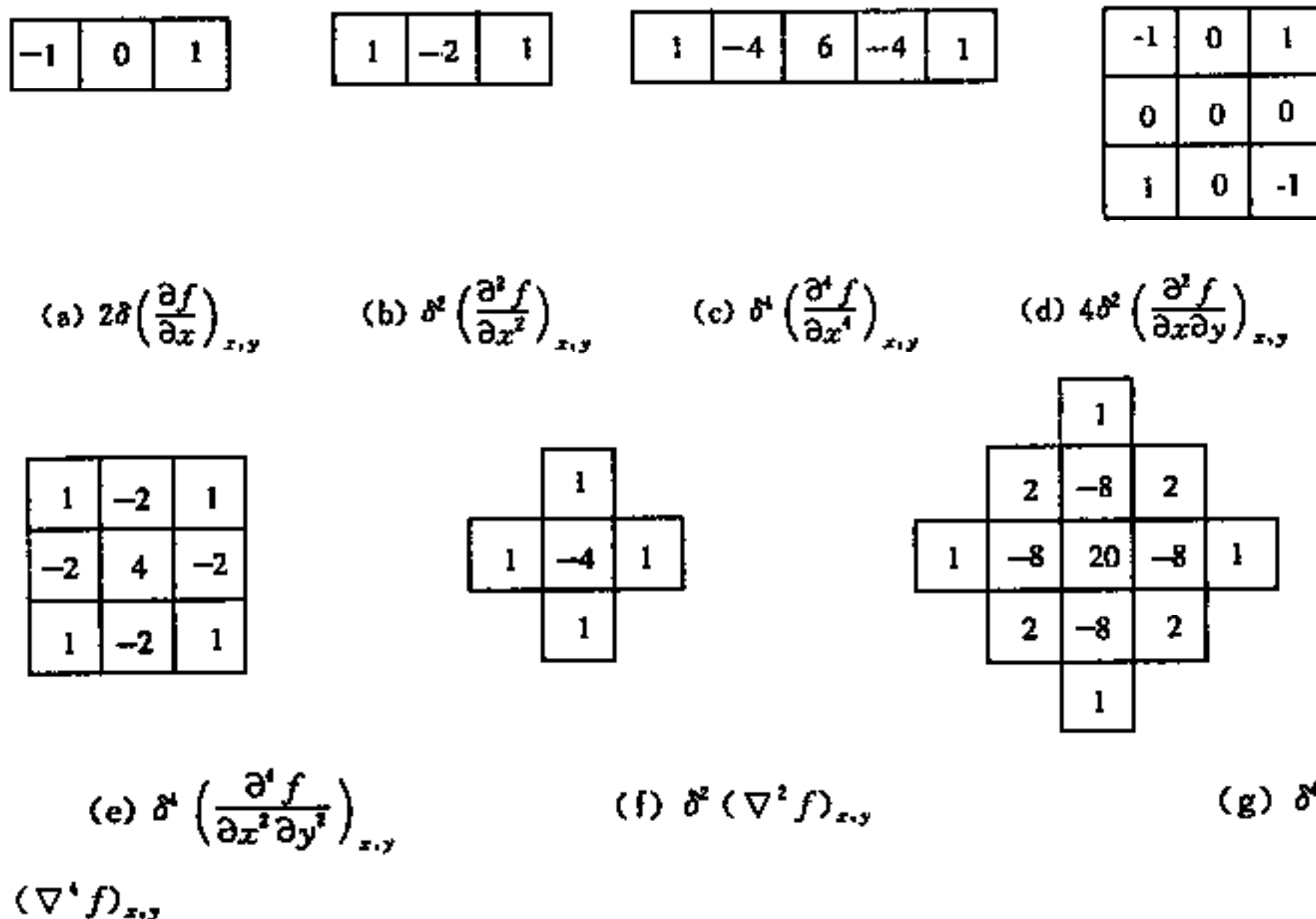


图 11.4 对各种导数的系数星

11.4 边界元法

在如图 11.5 所示的 x, y 平面区域 S 上,满足拉普拉斯方程式

$$\nabla^2 u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (11.49)$$

在边界 C 的一部分 C_1 上,给出 u 的值,在剩余部分 C_2 上, $\partial u / \partial n$ (n 是区域的外

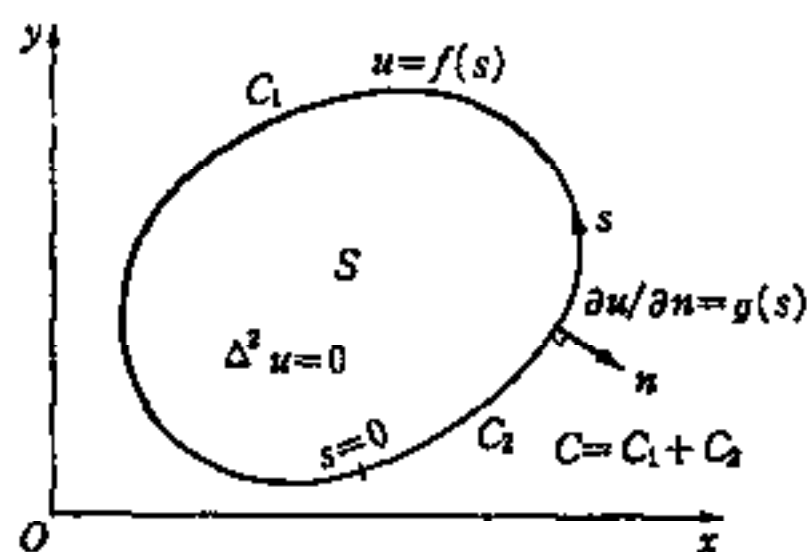


图 11.5 拉普拉斯方程式的边值问题

法线方向)的值由

$$\left. \begin{aligned} u &= f(s) & (C_1 \text{ 上}) \\ \partial u / \partial n &= g(s) & (C_2 \text{ 上}) \end{aligned} \right\} \quad (11.50)$$

给出。在此, s 是从边界 C 上的一点, 沿 C 朝在左侧看到区域 S 内部的方向行进而测得的弧长。

在格林的第二恒等式(6.73)中, 如写作 $dS \equiv dxdy$, 则

$$\iint_S (u \nabla^2 v - v \nabla^2 u) dS = \int_C \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds \quad (11.51)$$

这个式的 u 为现在在处理的边界值问题式(11.49), 式(11.50)的 u, v 为由下列出式给出的自由空间格林函数^①(free space Green's function) G 。即

$$v = G(x, y; \xi, \eta) = \log \frac{1}{r} \quad (11.52)$$

式中

$$r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2} \quad (11.53)$$

(ξ, η) = 区域 S 内或其边界 C 上某点 P 的坐标

如在式(6.73)推导时所述那样, v 假定为在 $S + C$ 上直到 2 阶偏导数一直连续。但是式(11.52)中的 v 在点 (x, y) 与 $P(\xi, \eta)$ 一致时, 不满足此条件。于是, P 是 S 内部的点时, 像图 11.6 所示, 以 $P(\xi, \eta)$ 为中心、画小半径 ϵ 的圆, 将此圆作为 C_ϵ , 将此圆内的区域为 S_ϵ , 如在区域 $S - S_\epsilon$ 上适用格林的第 2 恒等式(11.51), 则 $S - S_\epsilon$ 内的点 (x, y) 与 (ξ, η) 不会一致, 所以在 $S - S_\epsilon$ 和其边界 $C + C_\epsilon$ 上 G 和其所有阶数的导数为连续

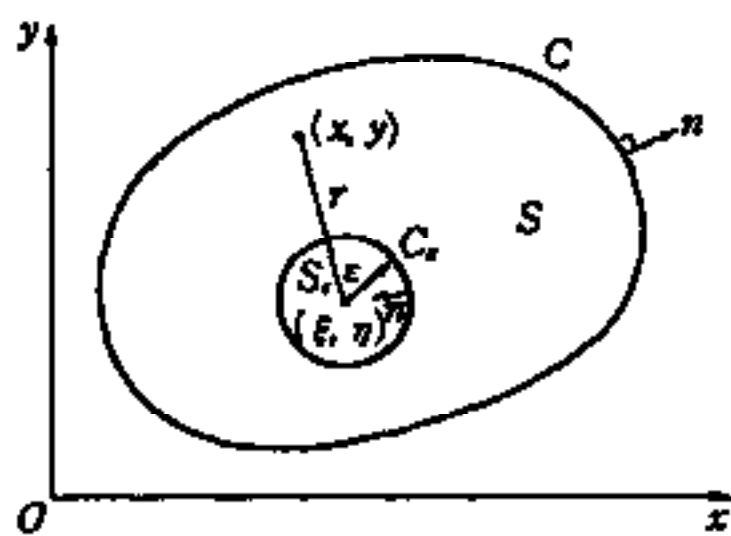


图 11.6 避开在点 (ξ, η) 上奇异性的方法

$$\iint_{S-S_\epsilon} (u \nabla^2 G - G \nabla^2 u) dS = \int_C \left(u \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds + \int_{C_\epsilon} \left(u \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds \quad (11.54)$$

① 称为基本解(fundamental solution)或主要解(principal solution)。

这里,在 C_ϵ 的积分中的 n 方向,是向着圆 C_ϵ 的中心方向。在 $S-S_\epsilon$ 上

$$\nabla^2 u = 0, \nabla^2 G = 0 \quad (11.55)$$

成立^①,所以代入到式(11.54)中

$$\int_C \left(u \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds + \int_{C_\epsilon} \left(u \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds = 0 \quad (11.56)$$

在式(11.56)左边的第2个积分中

$$\left[\frac{\partial G}{\partial n} \right]_{C_\epsilon} = \left[-\frac{\partial G}{\partial r} \right]_{C_\epsilon} = \left[-\frac{\partial}{\partial r} \log \frac{1}{r} \right]_{r=\epsilon} = \left[\frac{\partial}{\partial r} \log r \right]_{r=\epsilon} = \left[\frac{1}{r} \right]_{r=\epsilon} = \frac{1}{\epsilon}$$

$$[G]_{C_\epsilon} = \left[\log \frac{1}{r} \right]_{r=\epsilon} = [-\log r]_{r=\epsilon} = -\log \epsilon$$

$$\begin{aligned} \text{所以式(11.56)左边第2个积分} &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{u}{\epsilon} + \frac{\partial u}{\partial n} \log \epsilon \right) ds \\ &= 2\pi \epsilon \frac{u(P')}{\epsilon} + 2\pi \epsilon \log \epsilon \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)_Q \end{aligned} \quad (11.57)$$

在此, P', Q' 是圆 C_ϵ 上任意的点,上式的最后部分,是根据积分中的平均值定理而得。接下去,如研究将圆 C_ϵ 的半径 ϵ 接近于零时的极限,则有

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \log \epsilon = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log \epsilon}{(1/\epsilon)} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{(1/\epsilon)}{(-1/\epsilon^2)} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (-\epsilon) = 0 \quad (11.58)$$

所以,式(11.57)右边第2项消失,在 $\epsilon \rightarrow 0$ 时, $P' \rightarrow P$,因此在这个极限中,式(11.56)由下式表示:

$$\int_C \left(u \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds + 2\pi u(P) = 0$$

$$\text{所以} \quad u(P) = \frac{1}{2\pi} \int_C \left(G \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial G}{\partial n} \right) ds \quad (11.59)$$

如对边界 C 上所有的点能给出 u 和 $\partial u / \partial n$,则式(11.59)右边全部成为已知,能得到 S 内的任意点 P 的调和函数 $u(P)$ 。

可是,现在的情况,根据式(11.50),在 C_1 上, u 可知,但 $\partial u / \partial n$ 不可知。另外在 C_2 上, $\partial u / \partial n$ 可知,但 u 不可知。因而,还必须求未知的 C_1 上的 $\partial u / \partial n$ 和 C_2 上的

^① 将极坐标的极取作点 (ϵ, η) ,由问4.3,如设 $\nabla^2 G = \partial^2 G / \partial r^2 + (1/r) \partial G / \partial r + (1/r^2) \partial^2 G / \partial \theta^2$,则能容易地证明 $\nabla^2 G = 0$ 。

u 。接下来求这些。

再一次研究在式(11.51)中代入了式(11.52)后的式,这一次,如图 11.7(a)所示,考虑点 $P(\xi, \eta)$ 在边界 C 上时,画以点 P 为中心,半径 ϵ 的圆 C_ϵ 。将这个圆内区域 S_ϵ 和区域 S 的共同部分作为 S'_ϵ ,将 C_ϵ 在 S 内的部分作为 C'_ϵ 。区域 $S - S'_\epsilon$ 成为同图(b)所表示那样,以点 P 为中心,具有半径 ϵ 的凹处的区域,但是,其边界由从 C 除去圆 C_ϵ 内的 C 的部分 C' 和 C'_ϵ 组成。因而,在区域 $S - S'_\epsilon$ 中研究式(11.51),如将式(11.52)代入,则因为点 (x, y) 与点 $P(\xi, \eta)$ 不会一致,所以在 $S - S'_\epsilon$ 内,有 $\nabla^2 u = 0$, $\nabla^2 G = 0$,从而

$$\int_C \left(u \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds + \int_{C'_\epsilon} \left(u \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds = 0 \quad (11.60)$$

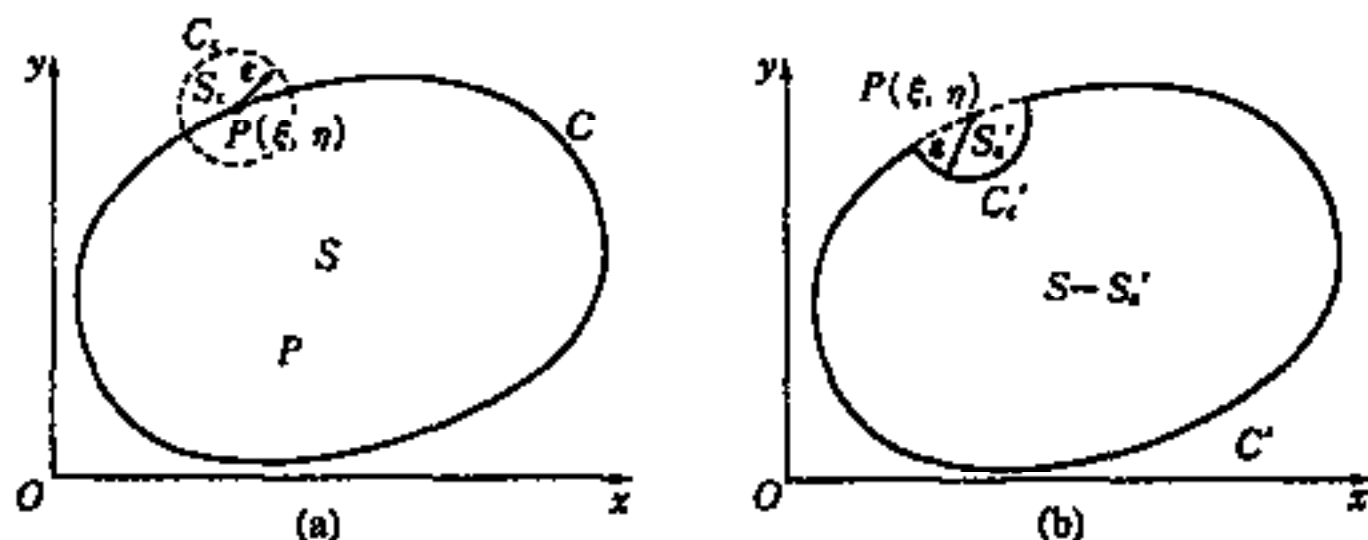


图 11.7 点 $P(\xi, \eta)$ 在边界 C 上时的处理方法

在左边的第 2 积分中, n 的方向是向着圆 C'_ϵ 中心的方向,所以

$$\frac{\partial G}{\partial n} = \left[-\frac{\partial}{\partial r} \log \frac{1}{r} \right]_{r=\epsilon} = \left[\frac{\partial}{\partial r} \log r \right]_{r=\epsilon} = \left[\frac{1}{r} \right]_{r=\epsilon} = \frac{1}{\epsilon}$$

$$G = \left[\log \frac{1}{r} \right]_{r=\epsilon} = -\log \epsilon$$

所以

$$\begin{aligned} \int_{C'_\epsilon} \left(u \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds &= \int_{C'_\epsilon} \left(\frac{u}{\epsilon} + \log \epsilon \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds \\ &= \frac{1}{\epsilon} \int_0^{2\pi} u ds + \log \epsilon \int_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial n} ds \\ &= \frac{1}{\epsilon} \pi \epsilon u(P') + \pi \epsilon \log \epsilon \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)_Q \end{aligned} \quad (11.61)$$

在此,如设 $\epsilon \rightarrow 0$,则 $P', Q' \rightarrow P$,由式(11.58),式(11.61)右边第 2 项消去,所以,对 $\epsilon \rightarrow 0$ 的情况,在式(11.60)中代入式(11.61)得,

$$\oint_C \left(u \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds + \pi u(P) = 0 \quad (11.62)$$

在此, \oint_C 是将点 P 作为了不连续点的柯西主值积分(参照式(5.19))。在式(11.62)中, 将积分 \oint_C 分解为 C_1 上的积分 \int_{C_1} 和 C_2 上的积分 \int_{C_2} , 代入到边界条件式(11.50)即得

$$\int_{C_1} \left(f \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds + \int_{C_2} \left(u \frac{\partial G}{\partial n} - G g \right) ds + \pi u(P) = 0 \quad (11.63)$$

这个式左边最后一项 $u(P)$, 当 P 是 C_1 上的点时, 可换成 $f(P)$, 成为已知, 当 P 是 C_2 上的点时, 依旧是 $u(P)$, 是未知的。式(11.63)会有边界上的未知函数 C_1 上的 $\partial u / \partial n$ 和 C_2 上的 u , 而且这些的未知函数被包含于积分记号里。如式(11.63)那样, 将在积分记号里包含未知函数的方程式, 称为积分方程式(integral equation), 将求这个未知函数称为解积分方程式。因为解积分方程式(11.63)求 C_1 上的 $\partial u / \partial n$, C_2 上的 u , 再结合边界条件(11.50), 就可在全边界 C 上求得 u 及 $\partial u / \partial n$, 所以将这里 u 和 $\partial u / \partial n$ 代入到式(11.59), 能够求得在区域内任意点 P 的调和函数 $u(P)$ 的值。接下去叙述用数值分析方法解决这个问题。

如图 11.8 所示, 在边界 C 上取 n 个点 A_1, A_2, \dots, A_n , C 用多边形 $A_1 A_2 \dots A_n$ 来近似。把边 $\overline{A_1 A_2}, \overline{A_2 A_3}, \dots, \overline{A_n A_1}$ 称为边界元(boundary element), 将它的中心点 P_1, P_2, \dots, P_n 称为节点(node)^①。在式(11.62)中设 $q \equiv \partial u / \partial n$ 。在一个单元内 u 和 q 如作为常量, 式(11.62)可写成下式:

$$\sum_{j=1}^n u(P_j) \int_{A_j}^{A_{j+1}} \frac{\partial G}{\partial n} ds - \sum_{j=1}^n q(P_j) \int_{A_j}^{A_{j+1}} G ds + \pi u(P_i) = 0$$

$$i=1, 2, \dots, n; A_{n+1}=A_1 \quad (11.64)$$

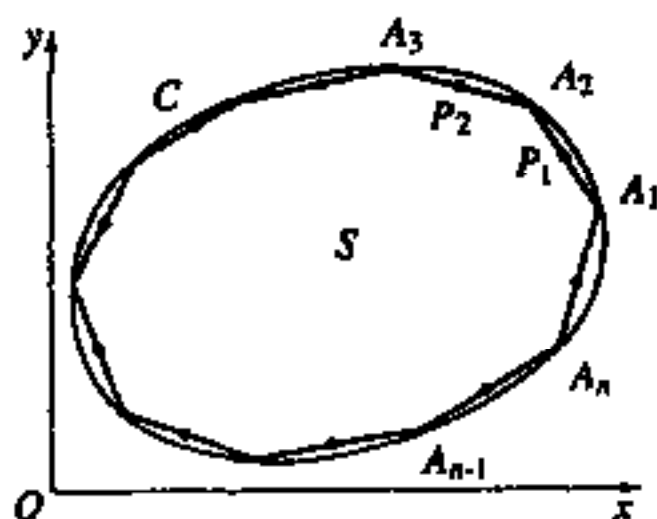


图 11.8 边界的单元分割和节点

在式(11.64)中, 对于构成 P_1, P_2, \dots, P_n 的 n 个节点, $u(P_j)$ 或 $q(P_j)$ 的哪一方是未知的, 另一方就是已知的这件事, 可从式(11.50)知道。因而, 式(11.64)是对 n 个未知量的联立 n 元 1 次方程式。如数值分析地解出这些(参照第 1 章补遗), 求出各节点未知的 $u(P_j)$ 或 $q(P_j)$, 则对所有的节点 $P_j, u(P_j), q(P_j)$ 成为已知, 因此, 代入到

^① 在此叙述的是最简单的边界元和节点的取法。在使用曲线单元的单元内, 能够设定几个节点。参见 C. A プレビア, S. ウーカー(神谷, 田中正隆, 田中喜久昭訳), 边界元法の基礎和応用, 培風館(1983), p. 48.

由式(11.59)所得的式。

$$u(P) = \frac{1}{2\pi} \left[\sum_{j=1}^n q(P_j) \int_{A_j}^{A_{j+1}} G ds - \sum_{j=1}^n u(P_j) \int_{A_j}^{A_{j+1}} \frac{\partial G}{\partial u} ds \right] \quad (11.65)$$

可得到区域内任意点 P 的 u 。在式(11.64)的积分中的被积函数,是点 P_i 和 P_j 的函数。 $P_i \neq P_j$ 时,可以用数值积分法计算积分,但是 $P_i = P_j$ 时,被积函数是表示为奇异性的,有必要采用解析地积分^①或对数高斯积分公式^②。

11.5 电荷模拟法

由于边界元法的边界积分方程式成为如上节所述的奇异积分,在边界近旁往往有解的精度较低现象。另外方程式是用积分方程式给出的,对于实际的计算,有必要变换成联立代数方程式。在本节叙述的电荷模拟法(charge simulation method,简记为 SCM)是最初就将解设为代数和的形式,从而避免了将积分方程式变换成代数方程式的麻烦,另外由于将各基本解的奇点取在了区域的稍许外侧,也能够避免边界近旁的精度降低现象。将奇点取在何种程度的外侧还不是很明确,但是因为便于使用,现被用在各种领域中。^③

A. 拉普拉斯方程式的问题

为了简单,思考以下叙述的狄利克雷问题(Dirichlet problem)。这个问题是求满足以下条件的函数 $u = u(x, y)$ 的问题。

(a) 在区域 δ 内任意点 (x, y) 满足拉普拉斯方程式

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (11.66)$$

(b) 在 S 的边界 C 上的点 (ξ, η) 满足边界条件

$$u(\xi, \eta) = f(s) \quad (11.67)$$

在此, s 是从边界上的定点出发沿边界曲线 C 到边界上的点 (ξ, η) 为止,在左侧看到区域的内部那样移动而测得的弧长, $f(s)$ 是 s 的已知函数。边界曲线的方程式是将 s 作为补充变量,用

$$\xi = \xi(s), \quad \eta = \eta(s) \quad (11.68)$$

① M. A. ジャス ウ・ン, G. T. シム((関谷, 田中正隆, 田中喜久昭, 須見訳)境界元法(間接法和直接法), プレイン圖書(1983)。

② A. C プレビア(神谷, 田中正隆, 田中喜久昭訳)境界元法入門, 培風館(1980), p. 175。

③ 村島: 代用電荷法とその応用, 森北(1983)。

来给出。

为了解这个问题,如图 11.9 所示,在边界上设定 n 个节点(在图中用黑点 \bullet 表示),将这些点的坐标设为 $(\xi_1, \eta_1), (\xi_2, \eta_2), \dots, (\xi_n, \eta_n)$ 。与这些边界上的节点相区别,在区域 S 的邻近外侧(通常取边界节点的间隔处的外侧)设定与这些边界上的节点同样数目的外点(在图中用 \times 记号表示),将这些点的坐标设为 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ 。这种情况下,

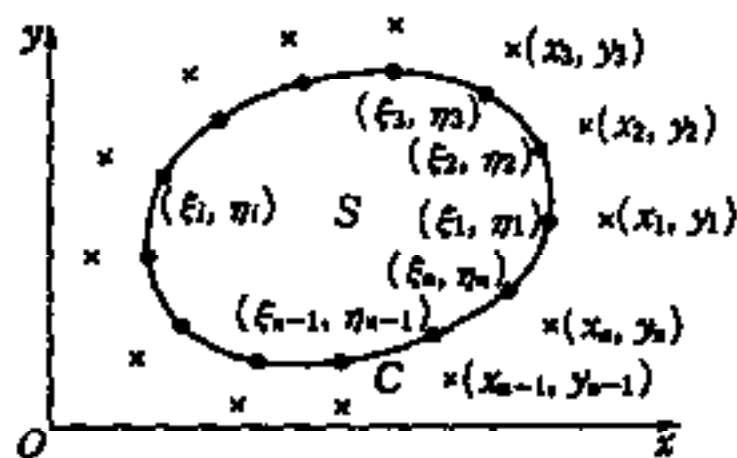


图 11.9 在电荷模拟中的
边界点和外点

$$G(x, y; x_j, y_j) = \log\{(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2\} \quad (11.69)$$

在 S 内及 C 上的任意点满足拉普拉斯方程式^①,有很多次连续微分的可能。原因是 (x, y) 是 S 内或 C 上的点, (x_j, y_j) 是 S 外的点,不会有 $(x, y) = (x_j, y_j)$ 的情况。从而

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 G(x, y; x_j, y_j) &= 0 \\ \nabla^2 &\equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \end{aligned} \right\} \quad (11.70)$$

这样,因为 $G(x, y; x_j, y_j)$ 是在 S 上的调和函数(满足拉普拉斯方程的函数),所以,乘上常数 A_j 后再累加的函数

$$u = u(x, y) = \sum_{j=1}^n A_j G(x, y; x_j, y_j) \quad (11.71)$$

仍满足拉普拉斯方程,因而是调和函数。将式(11.69)的形式称为 $G(x, y; x_j, y_j)$ 的 1 次结合或线性结合(linear combination)。

[问 11.2] 试表示出式(11.70)成立时,式(11.71)的 u 为调和函数。这个情况是称为在线性微分方程的解的叠加原理(Principle of superposition)中的一种情况^②。

在电荷模拟法中,将式(11.71)作为当前的狄利克雷问题的解析近似解。这个式所给出的 u 满足在本节开始时叙述的条件(a)。另外,虽然条件(b)在 C 上的所有点不能满足,但是在边界上取不连续的(将这称为“离散地”) n 个点 (ξ_i, η_i) ($i=1, 2, \dots, n$) 来满足进行近似。将这样的方法称为选点法(Point-matching method 或 Collocation method)。如用式写出这个条件,则有

^① 能作与问 4.1 或式(11.55)的证明相同的证明。在此的 $G(x, y; x_j, y_j)$ 是上节由空间格林函数(式(11.52), (11.53)的 -2 倍形式,其本质是相同的。因此本节的 G 也可称为自由空间格林函数。

^② 犬井:应用偏微分方程论:岩波(1951), p. 29。

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=1}^n A_j G(\xi_i, \eta_i; x_j, y_j) &= f(S_i) \\ (i=1, 2, \dots, n) \end{aligned} \right\} \quad (11.72)$$

如将式(11.72)作为与 A_1, A_2, \dots, A_n 相关的 n 元 1 次联立方程式来解, 并将其结果所得的这些 A_1, A_2, \dots, A_n 的值代入到式(11.71), 就能得到调和函数 u 的解析近似解, 这个 u 的导函数通过对式(11.71)进行解析微分可求出。

B. 重调和方程式的问题

考察出现在二元弹性问题和弹性平板弯曲问题中的重调和方程式(biharmonic equation)的边界值问题。处理的区域、边界点、外点如图 11.9 所示。问题是求满足以下的(a), (b)两条件的函数 $\chi(x, y)$ 。

(a) 在区域 S 内的任意点 (x, y) , 满足重调和方程^①

$$\nabla^4 \chi(x, y) = \frac{\partial^4 \chi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \chi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \chi}{\partial y^4} = 0 \quad (11.73)$$

(b) 在边界上的点 (ξ, η) 满足边界条件

$$\left. \begin{aligned} \chi(\xi, \eta) &= f(s) \\ \frac{\partial \chi(\xi, \eta)}{\partial n} &= g(s) \end{aligned} \right\} \quad (11.74)$$

在此, n 是在边界点 (ξ, η) 指向区域外侧的法线方向, s 是和前项相同, 沿着边界所测得的弧长坐标, $f(s), g(s)$ 是 s 的已知函数。

因为式(11.69)给出的 $G(x, y; x_j, y_j)$ 满足拉普拉斯方程式(11.70), 所以如在式(11.70)两边作用 ∇^2 , 则为

$$\nabla^4 G(x, y; x_j, y_j) = 0 \quad (11.75)$$

也满足重调和方程式。可是在本问题中, 如式(11.74)那样, 边界条件式为两个, 因此, 进一步地引入一个满足重调和方程式的函数即重调和函数(biharmonic function)

$$\begin{aligned} H(x, y; x_j, y_j) &= \{(x-x_j)^2 + (y-y_j)^2\} \\ &\quad \times \log \{(x-x_j)^2 + (y-y_j)^2\} \end{aligned} \quad (11.76)$$

[问 11.3] 试证明由式(11.76)导入的函数 $H(x, y; x_j, y_j)$ 满足重调和方程式(11.73), 从而是重调和函数。

① $\nabla^4 = \nabla^2 \nabla^2 = (\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2)(\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2) = \partial^4/\partial x^4 + 2\partial^4/\partial x^2 \partial y^2 + \partial^4/\partial y^4$

于是将 $\chi(x, y)$ 的近似式假定为 $G(x, y; x_j, y_j)$ 和 $H(x, y; x_j, y_j)$ 的 1 次结合形。即

$$\chi(x, y) = \sum_{j=1}^n A_j G(x, y; x_j, y_j) + \sum_{j=1}^n A_{n+j} H(x, y; x_j, y_j) \quad (11.77)$$

式(11.77)的 $\chi(x, y)$ 满足重调和方程式(11.73)。因而, 用式(11.77)给出的 $\chi(x, y)$ 是图 11.9 的边界上的 n 个节点 (ξ_i, η_i) ($i=1, 2, \dots, n$), 可以通过满足边界条件(11.74), 来确定 A_j ($j=1, 2, \dots, n$)。这个条件式, 通过将式(11.77)代入到式(11.74)得到如下式:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=1}^n A_j G(\xi_i, \eta_i; x_j, y_j) + \sum_{j=1}^n A_{n+j} H(\xi_i, \eta_i; x_j, y_j) &= f(s_i) \\ \sum_{j=1}^n A_j \frac{\partial}{\partial n} G(\xi_i, \eta_i; x_j, y_j) + \sum_{j=1}^n A_{n+j} \frac{\partial}{\partial n} H(\xi_i, \eta_i; x_j, y_j) &= g(s_i) \end{aligned} \right\} \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (11.78)$$

式(11.78)是将 A_j ($j=1, 2, \dots, 2n$) 作为未知量的联立 $2n$ 元 1 次代数方程式, 如解方程式可求得 A_j ($j=1, 2, \dots, 2n$) 的数值, 再将这些数值代入到式(11.77), 能得到重调和函数 $\chi(x, y)$ 的解析近似解。因为 $\chi(x, y)$ 对 S 内和 C 上的 (x, y) 有几次连续微分的可能, $\chi(x, y)$ 的逐次导数通过对式(11.77)的 $\chi(x, y)$ 进行解析地逐次偏微分就可得到。

习题 11

11.1 在图 11.10 所示的正方形区域中, 同图所示那样, 画出正方形格子。在边界上的格子点用图示数值给出所示的调和函数值时, 试根据差分法求在内部格子点的图示调和函数值 A, B, C 。式中, 写成 C 的有两个内部格子点, 但这是因为边界值是对称于一个的对角线, 所以, 区域内部的调和函数值也对称这个对角线。

11.2 根据图 11.4, 写出下列各导函数的差分表示。

- (a) $\left(\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}\right)_{x,y}$ (b) $\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y}\right)_{x,y}$ (c) $\left(\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2}\right)_{x,y}$
 (d) $\left(\frac{\partial^4 f}{\partial y^4}\right)_{x,y}$ (e) $(\nabla^2 f)_{x,y}$

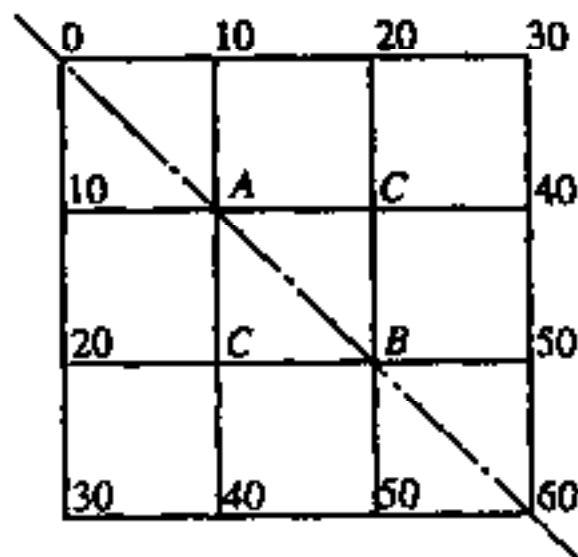


图 11.10

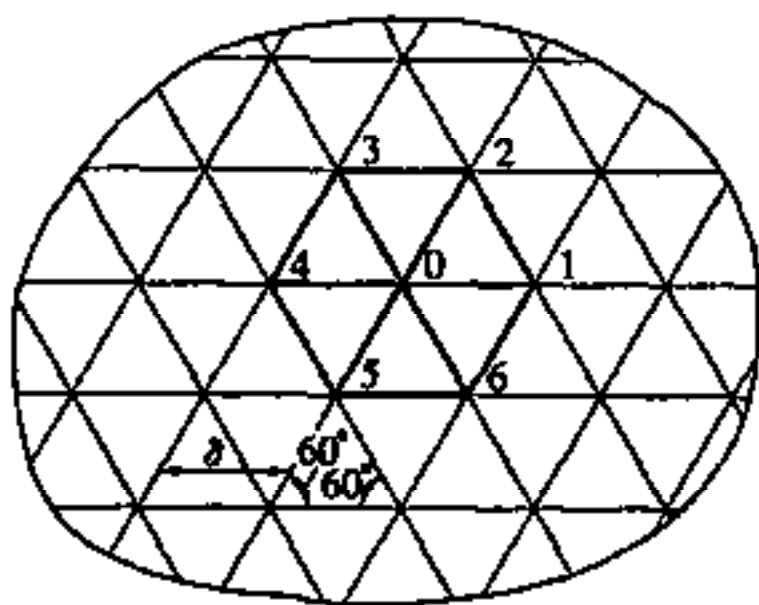


图 11.11

11.3 在如图 11.11 所示正三角形格子在所给的区域内画出时, 设一个格子点为 0, 由此采用有等间隔 δ 的六个格子点 1, 2, \dots , 6 的函数值 f_0, f_1, \dots, f_6 , 在点 0 的 $(\nabla^2 f)_0$ 由

$$(\nabla^2 f)_0 \approx \frac{2}{3\delta^2} \times (f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 + f_6 - 6f_0)$$

来给出, 试证明两边的差为 δ^2 的程度。

[提示] 右边的 f_1, f_2, \dots, f_6 , 在格子点 0 的周围泰勒展开, 再代入上式的右边。

11.4 如图 11.12 所示, 在有不等间隔的格子点 P, Q, R, S, T 时, 试证明在点 P 的 $(\nabla^2 f)_P$ 可用砂谷·根来的差分法来表示为①

$$(\nabla^2 f)_P \approx \frac{2}{\delta_1 + \delta_2} \left\{ \frac{f(Q) - f(P)}{\delta_1} - \frac{f(P) - f(R)}{\delta_2} \right\} + \frac{2}{\delta_3 + \delta_4} \left\{ \frac{f(S) - f(P)}{\delta_3} - \frac{f(P) - f(T)}{\delta_4} \right\}$$

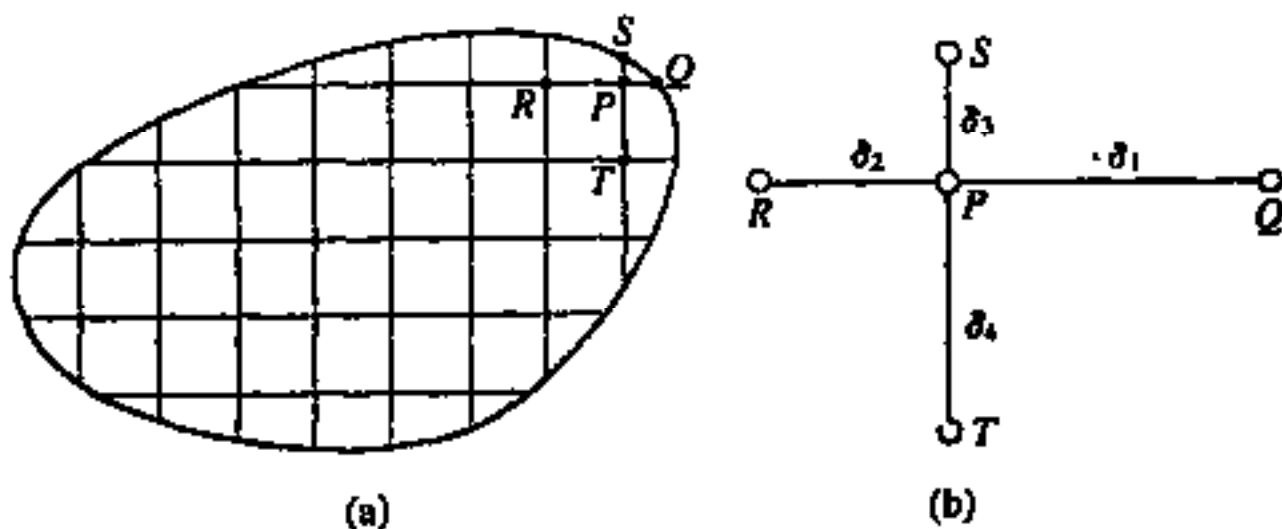


图 11.12

[提示] 将 $f(Q), f(R), f(S), f(T)$ 以点 P 为基准点, 泰勒展开后代入到右边的差分表达式中, 将 $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4$ 作为微量, 来评价与左边的误差。图 11.12(b) 将同图(a)那样的情况一般化, PQ, PR, PS, PT 一般都是不同的, 上式是这种情况的差分表示。

① 砂谷, 根来: 機械學會論文集 3(1937)68。

问题与习题的答案

对于证明问题或者类似的问题不做解答、请各自思考。

第 1 章

[问 1.1]

($\bar{2}, 3$)行列

第 1 行 $1, -\sqrt{3/2}, 8.8$ 第 1 列 $1, -7/3$
 第 2 行 $-7/3, \sqrt{\pi}, 13$ 第 2 列 $-\sqrt{3/2}, \sqrt{\pi}$
 第 3 列 $8.8, 13$

($\bar{1}, 3$)行列

第 1 行 u, v, w 第 1 列 u
 第 2 列 v
 第 3 列 w

($\bar{3}, 1$)行列

第 1 行 X 第 1 列 X, Y, Z
 第 2 行 Y
 第 3 行 Z

($\bar{3}, 3$)行列

第 1 行 $\sigma_x, \tau_{xy}, \tau_{xz}$ 第 1 列 $\sigma_x, \tau_{yx}, \tau_{zx}$
 第 2 行 $\tau_{yx}, \sigma_y, \tau_{yz}$ 第 2 列 $\tau_{xy}, \sigma_y, \tau_{zy}$
 第 3 行 $\tau_{zx}, \tau_{zy}, \sigma_z$ 第 3 列 $\tau_{xz}, \tau_{yz}, \sigma_z$

($\bar{3}, 4$)行列

第 1 行 $a_{11}, a_{12}, a_{13}, b_1$ 第 1 列 a_{11}, a_{21}, a_{31}
 第 2 行 $a_{21}, a_{22}, a_{23}, b_2$ 第 2 列 a_{12}, a_{22}, a_{32}
 第 3 行 $a_{31}, a_{32}, a_{33}, b_3$ 第 3 列 a_{13}, a_{23}, a_{33}
 第 4 列 b_1, b_2, b_3

[问 1.2]

(a) 第 m 行, 第 1 列 (b) 第 1 行, 第 3 列 (c) 第 m 行, 第 n 列

[问 1.3]

$$(a) A^T = [F_x, F_y, F_z] \quad (b) A^T = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

[问 1.4]

(a) 2 (b) 2 (c) 6 (d) 3 (e) 8 (f) 4 (g) 1 (h) 7

【问 1.5】

$$(a) \text{ 上号 } \begin{bmatrix} 12 & 15 \\ 38 & 34 \end{bmatrix} \quad \text{下号 } \begin{bmatrix} 12 & 39 \\ -2 & -22 \end{bmatrix} \quad (b) \begin{bmatrix} 59 & -23 \\ 26 & 13 \\ 3 & -49 \end{bmatrix}$$

[问 1.6]

式(1.8)的形

$$\begin{Bmatrix} a_1x + b_1y + c_1z \\ a_2x + b_2y + c_2z \\ a_3x + b_3y + c_3z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{Bmatrix}$$

式(1.10)的形

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{Bmatrix}$$

[问 1.7]

式(1.8)的形

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{array} \right\}$$

式(1.10)的形

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{Bmatrix}$$

[问 1.10]

$$A^{-1} = \frac{1}{D} \begin{bmatrix} b_2 c_3 - b_3 c_2 & b_3 c_1 - b_1 c_3 & b_1 c_2 - b_2 c_1 \\ c_2 a_3 - c_3 a_2 & c_3 a_1 - c_1 a_3 & c_1 a_2 - c_2 a_1 \\ a_2 b_3 - a_3 b_2 & a_3 b_1 - a_1 b_3 & a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{bmatrix}$$

式中

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3$$

习题 1

1.1

$$(a) \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & 1\frac{11}{20} \\ -1\frac{1}{12} & \frac{5}{18} & -1\frac{1}{8} \end{bmatrix} \quad (b) \begin{bmatrix} 12 & 24 \\ -21 & 9 \end{bmatrix} \quad (c) \begin{bmatrix} 50 & -41 \\ -83 & 92 \\ 21 & -40 \end{bmatrix}$$

1.2

$$(a) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \quad (b) \begin{bmatrix} \frac{1}{19} & \frac{5}{76} \\ -\frac{1}{19} & \frac{7}{76} \end{bmatrix} \quad (c) \begin{bmatrix} \frac{5}{13} & -\frac{7}{65} & -\frac{19}{130} \\ -\frac{3}{13} & \frac{12}{65} & \frac{7}{65} \\ -\frac{1}{13} & \frac{4}{65} & -\frac{17}{130} \end{bmatrix}$$

[提示] (b) 采用公式(1.17) (c) 采用问 1.10 的结果

1.5

$$[x, y, z] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} = [b_1, b_2, b_3]$$

1.6

$$A=D=\frac{E}{1-\nu^2}, \quad B=C=\frac{\nu E}{1-\nu^2}$$

1.7

$$A=E=J=\frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad B=C=D=F=G=H=\frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

1.8

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_a & -k_a & 0 & 0 \\ -k_a & k_a+k_b & -k_b & 0 \\ 0 & -k_b & k_b+k_c & -k_c \\ 0 & 0 & -k_c & k_c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix}$$

1.9

$$(a) A'=\frac{R_1}{R_2}+1, \quad B'=R_1, \quad C'=\frac{1}{R_2}, \quad D'=1$$

$$(b) A''=1, \quad B''=R_4, \quad C''=\frac{1}{R_3}, \quad D''=1+\frac{R_4}{R_3}$$

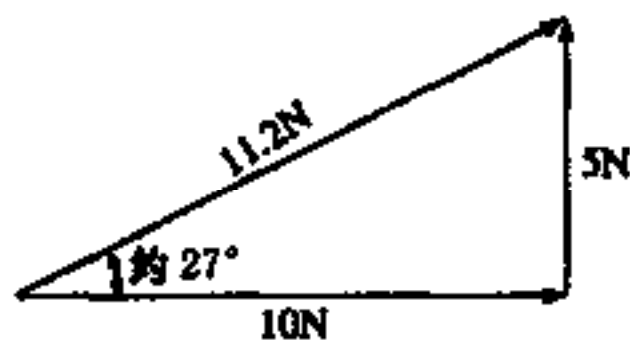
1.10

$$A = R_1 \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) + 1, \quad B = R_1 + R_4 + R_1 R_4 \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right)$$

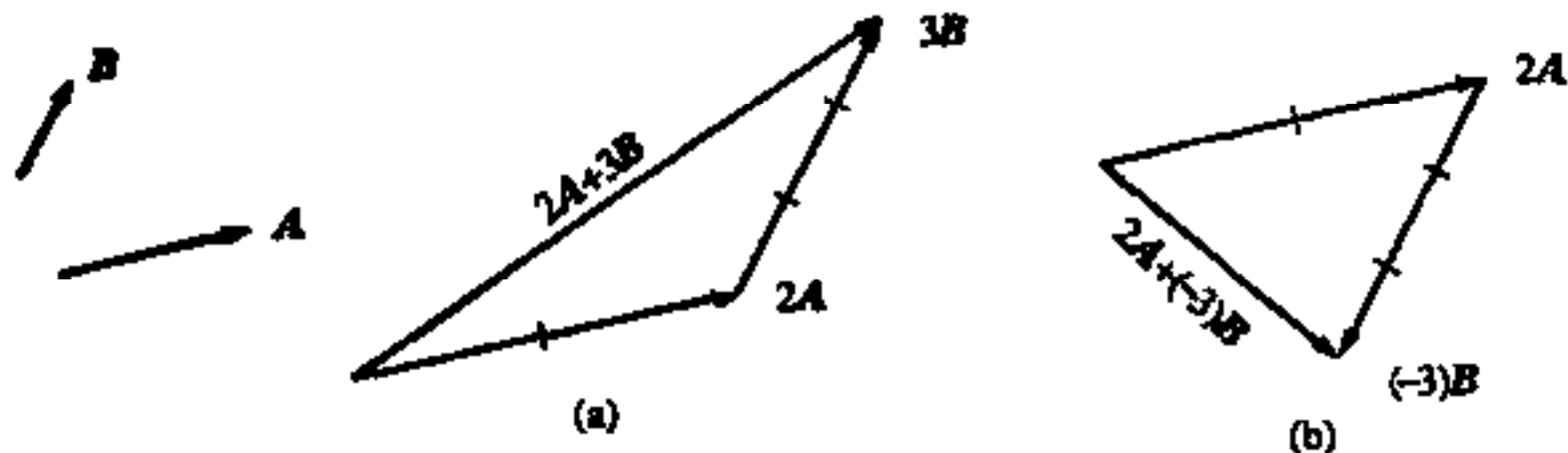
$$C = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}, \quad D = R_4 \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) + 1$$

第2章

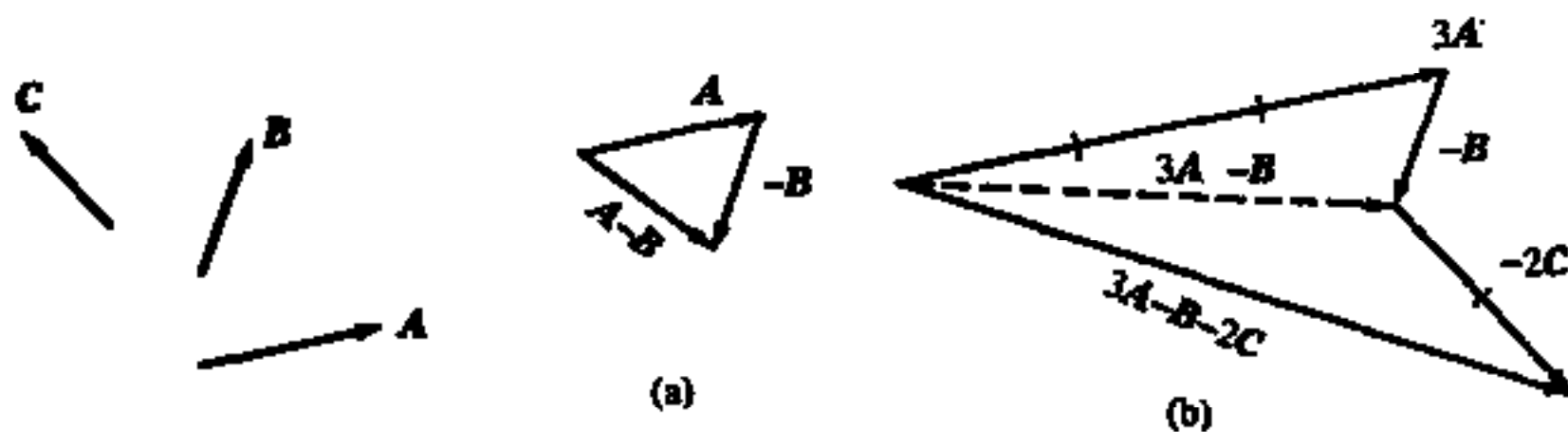
[问 2.2]

大小: $|C| = 11.2\text{N}$ 方向: 从水平向右方向反时针旋转 26.6° 

[问 2.4]



[问 2.6]

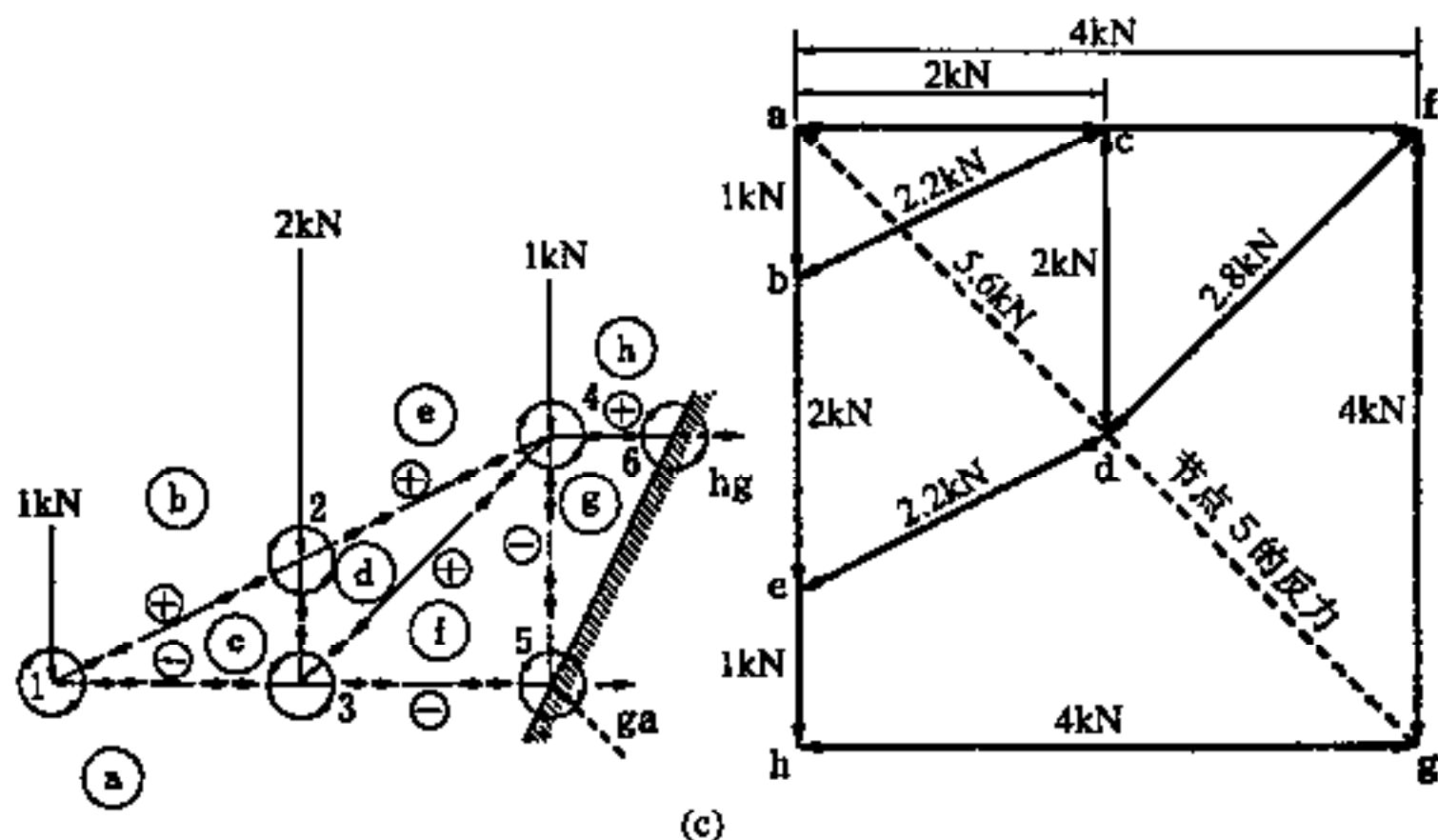


[问 2.7]

OA 的张力 = 146N

OB 的张力 = 179N

[问 2.8]



节点 1 $\vec{ab}-\vec{bc}-\vec{ca}$ 节点 2 $\vec{cd}-\vec{be}-\vec{ed}-\vec{dc}$ 节点 3 $\vec{ac}-\vec{cd}-\vec{dt}-\vec{fa}$
 节点 4 $\vec{fd}-\vec{de}-\vec{eh}-\vec{hg}-\vec{gf}$ 节点 5 $\vec{af}-\vec{fg}-\vec{ga}$ (节点 5 的反力)
 节点 6 $\vec{gh}-\vec{hg}$ (节点 6 的反力)

[问 2.9] $(aA_x + bB_x)i + (aA_y + bB_y)j + (aA_z + bB_z)k$

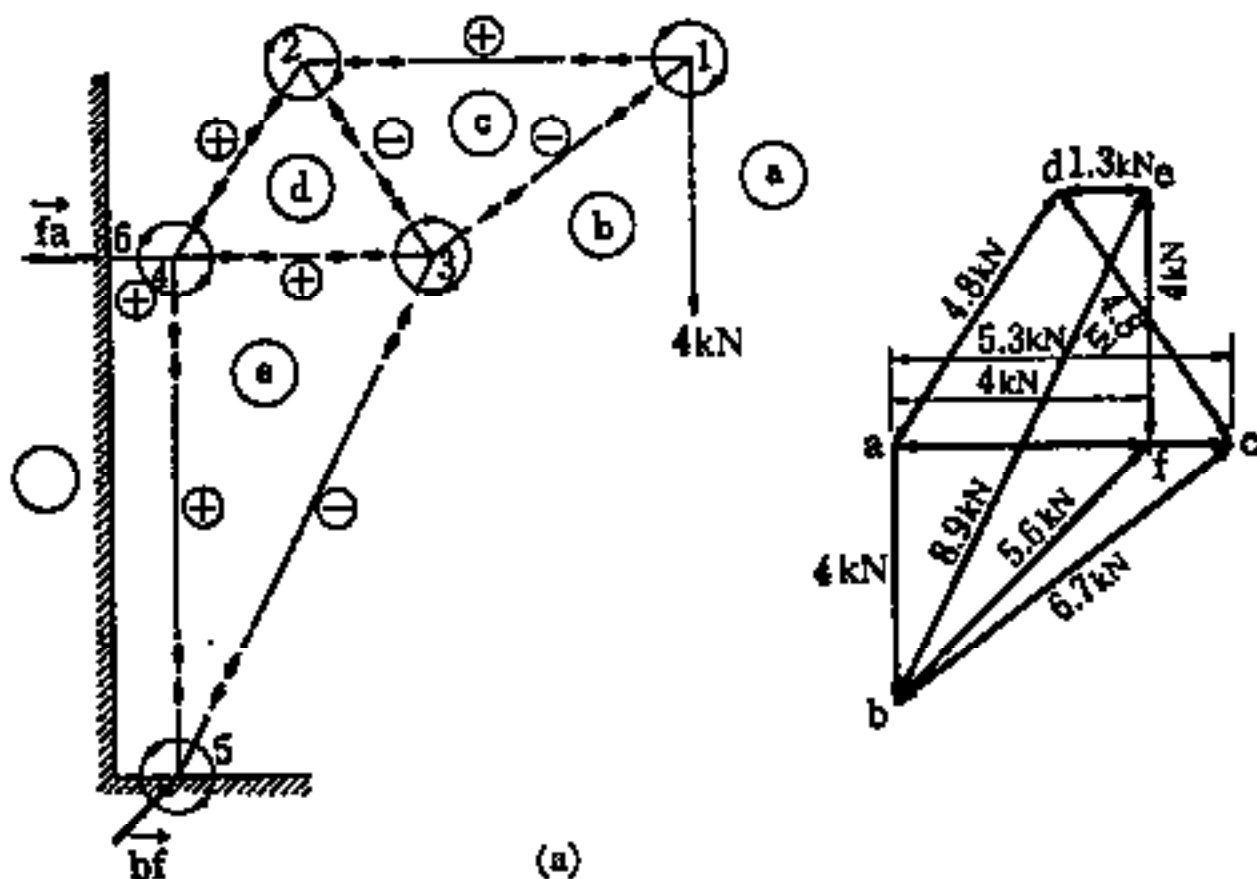
习题 2

2.1 (a) $i-k$ (b) $8i-13j+18k$ (c) -20 (d) $-\sqrt{29}i+2\sqrt{29}j-3\sqrt{29}k$

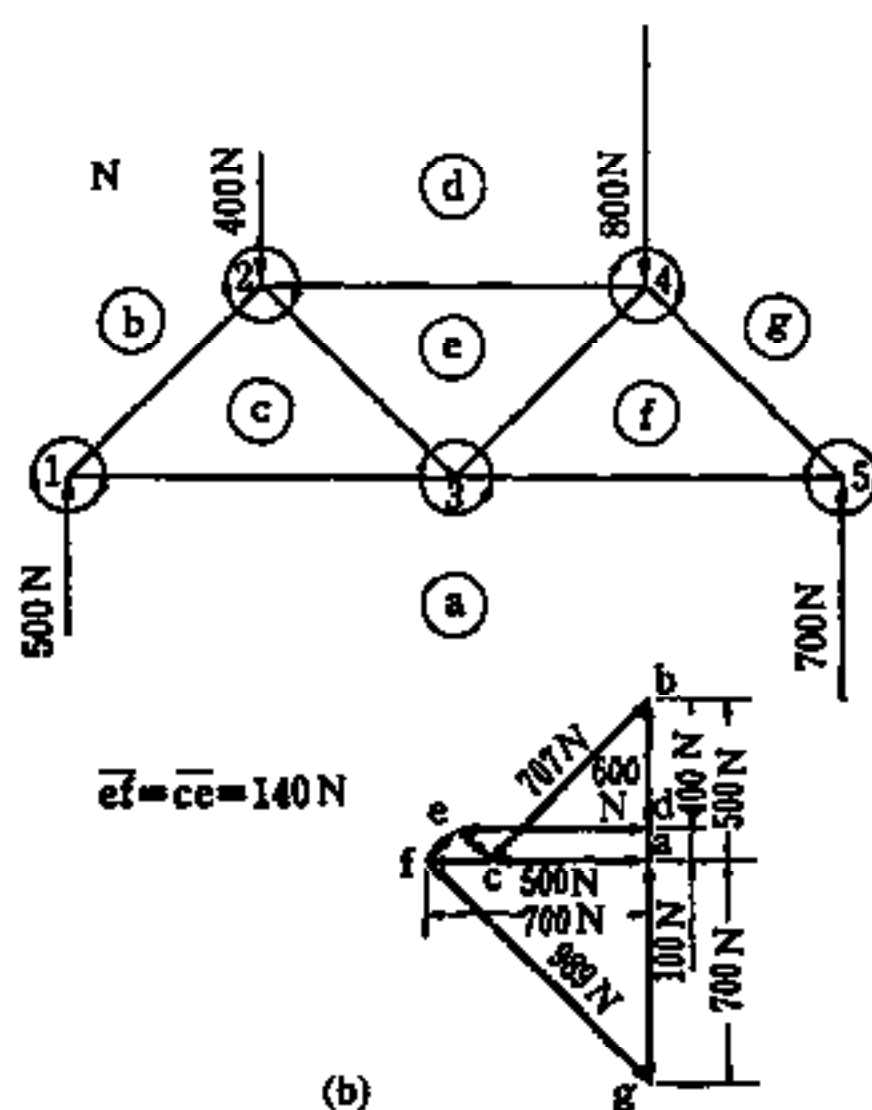
(e) 43 (f) $i+2j+k$ (g) 15 (h) 0 (i) $\frac{1}{\sqrt{6}}i+\frac{2}{\sqrt{6}}j+\frac{1}{\sqrt{6}}k$

(j) $-2i-4j-2k$

2.5



节点 1 $\vec{ab}-\vec{bc}-\vec{ca}$ 节点 2 $\vec{ac}-\vec{cd}-\vec{da}$ 节点 3 $\vec{dc}-\vec{cb}-\vec{be}-\vec{ed}$
 节点 4 $\vec{ad}-\vec{de}-\vec{ef}-\vec{fa}$ 节点 5 $\vec{fe}-\vec{eb}-\vec{bf}$ (节点 5 的反力) 节点 6 $\vec{af}-\vec{fa}$ (节点 6 的反力)



节点 1 $\vec{ab}-\vec{bc}-\vec{ca}$ 节点 2 $\vec{cb}-\vec{bd}-\vec{de}-\vec{ec}$ 节点 3 $\vec{ac}-\vec{ce}-\vec{ef}-\vec{fa}$
 节点 4 $\vec{ed}-\vec{dg}-\vec{gi}-\vec{ie}$ 节点 5 $\vec{af}-\vec{fg}-\vec{ga}$

2.6 $l_{11} = \cos \theta$ $l_{12} = \sin \theta$ $l_{21} = -\sin \theta$ $l_{22} = \cos \theta$

2.7 逆行列 = $\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$

2.8 设 $(xx') = \angle xOx'$, $(yx') = \angle yOx'$, \dots , $(zx') = \angle zOx'$ 时

$$l_{11} = \cos(xx'), \quad l_{12} = \cos(yx'), \quad l_{13} = \cos(zx')$$

$$l_{21} = \cos(xy'), \quad l_{22} = \cos(yy'), \quad l_{23} = \cos(zy')$$

$$l_{31} = \cos(xz'), \quad l_{32} = \cos(yz'), \quad l_{33} = \cos(zz')$$

第3章

[问 3.1]

$$A_x B_x = (l_{11} A_x + l_{12} A_y + l_{13} A_z)(l_{31} B_x + l_{32} B_y + l_{33} B_z)$$

$$= l_{11} l_{31} A_x B_x + l_{11} l_{32} A_x B_y + l_{11} l_{33} A_x B_z$$

$$+ l_{12} l_{31} A_y B_x + l_{12} l_{32} A_y B_y + l_{12} l_{33} A_y B_z$$

$$+ l_{13} l_{31} A_z B_x + l_{13} l_{32} A_z B_y + l_{13} l_{33} A_z B_z$$

$$A_y B_x = (l_{21} A_x + l_{22} A_y + l_{23} A_z)(l_{11} B_x + l_{12} B_y + l_{13} B_z)$$

$$\begin{aligned}
&= l_{21} l_{11} A_x B_x + l_{21} l_{12} A_x B_y + l_{21} l_{13} A_x B_z \\
&\quad + l_{22} l_{11} A_y B_x + l_{22} l_{12} A_y B_y + l_{22} l_{13} A_y B_z \\
&\quad + l_{23} l_{11} A_z B_x + l_{23} l_{12} A_z B_y + l_{23} l_{13} A_z B_z \\
A_y B_y &= (l_{21} A_x + l_{22} A_y + l_{23} A_z)(l_{21} B_x + l_{22} B_y + l_{23} B_z) \\
&= l_{21}^2 A_x B_x + l_{21} l_{22} A_x B_y + l_{21} l_{23} A_x B_z \\
&\quad + l_{22} l_{21} A_y B_x + l_{22}^2 A_y B_y + l_{22} l_{23} A_y B_z \\
&\quad + l_{23} l_{21} A_z B_x + l_{23} l_{22} A_z B_y + l_{23}^2 A_z B_z \\
A_y B_z &= (l_{21} A_x + l_{22} A_y + l_{23} A_z)(l_{31} B_x + l_{32} B_y + l_{33} B_z) \\
&= l_{21} l_{31} A_x B_x + l_{21} l_{32} A_x B_y + l_{21} l_{33} A_x B_z \\
&\quad + l_{22} l_{31} A_y B_x + l_{22} l_{32} A_y B_y + l_{22} l_{33} A_y B_z \\
&\quad + l_{23} l_{31} A_z B_x + l_{23} l_{32} A_z B_y + l_{23} l_{33} A_z B_z \\
A_z B_x &= (l_{31} A_x + l_{32} A_y + l_{33} A_z)(l_{11} B_x + l_{12} B_y + l_{13} B_z) \\
&= l_{31} l_{11} A_x B_x + l_{31} l_{12} A_x B_y + l_{31} l_{13} A_x B_z \\
&\quad + l_{32} l_{11} A_y B_x + l_{32} l_{12} A_y B_y + l_{32} l_{13} A_y B_z \\
&\quad + l_{33} l_{11} A_z B_x + l_{33} l_{12} A_z B_y + l_{33} l_{13} A_z B_z \\
A_z B_y &= (l_{31} A_x + l_{32} A_y + l_{33} A_z)(l_{21} B_x + l_{22} B_y + l_{23} B_z) \\
&= l_{31} l_{21} A_x B_x + l_{31} l_{22} A_x B_y + l_{31} l_{23} A_x B_z \\
&\quad + l_{32} l_{21} A_y B_x + l_{32} l_{22} A_y B_y + l_{32} l_{23} A_y B_z \\
&\quad + l_{33} l_{21} A_z B_x + l_{33} l_{22} A_z B_y + l_{33} l_{23} A_z B_z \\
A_z B_z &= (l_{31} A_x + l_{32} A_y + l_{33} A_z)(l_{31} B_x + l_{32} B_y + l_{33} B_z) \\
&= l_{31}^2 A_x B_x + l_{31} l_{32} A_x B_y + l_{31} l_{33} A_x B_z \\
&\quad + l_{32} l_{31} A_y B_x + l_{32}^2 A_y B_y + l_{32} l_{33} A_y B_z \\
&\quad + l_{33} l_{31} A_z B_x + l_{33} l_{32} A_z B_y + l_{33}^2 A_z B_z
\end{aligned}$$

[问 3.7] 设 \vec{on} 方向的方向余弦为 l, m, n 时

$$\sigma_n = l^2 \sigma_x + m^2 \sigma_y + n^2 \sigma_z + 2mnt\tau_{yz} + 2nl\tau_{xz} + 2lm\tau_{xy}$$

[问 3.8] $p = \sqrt{\sigma_1^2 l^2 + \sigma_2^2 m^2 + \sigma_3^2 n^2}$

[问 3.9] $\tau = \sqrt{(\sigma_2 - \sigma_3)^2 m^2 n^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 n^2 l^2 + (\sigma_1 - \sigma_2)^2 l^2 m^2}$

习题 3

3.2
$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}$$

↑
—应变张量
(对称张量)

$$+ \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) & 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) & 0 \end{bmatrix}$$

↑
—转动张量
反对称张量

3.3 (a) 把式(3.44)中的文字 σ 全部变为 T 就可以了

(b) 把式(3.44)中的文字 σ 全部变为 S 就可以了

(d) $6J_2$

(e) $\tau_{\text{oct}} = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 + (\sigma_1 - \sigma_2)^2} = \sqrt{\frac{2}{3}} J_2$

(f) $\sqrt{\frac{2}{3}} J_2$

3.5 (b) $T_1, T_2 = \frac{1}{2}(T_{11} + T_{22}) \pm \frac{1}{2} \sqrt{(T_{11} - T_{22})^2 + 4T_{12}^2}$

$$(e) \frac{1}{2} \sqrt{(T_{11} - T_{22})^2 + 4T_{12}^2}, \theta = \frac{1}{2} \arctan \frac{T_{22} - T_{11}}{2T_{12}} + (-1)^n n\pi$$

第 4 章

[问 4.2]

$$-\pi^2 A \left\{ \left(\frac{m}{a} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^2 \right\} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

在 4 个边上值为 0

[问 4.4]

$$(a) -b^2 x/a^2 y \quad (b) -\frac{e^y}{1+e^y x}$$

[问 4.5] 大小: $1/a$, 方向: x 轴方向。

$$[问 4.6] \quad -\frac{1+y^2+x^2 y^2}{2x^2} + C$$

$$[问 4.7] \quad -\rho^2 \sin \theta$$

习题 4

$$4.1 \quad (a) \partial z / \partial x = 2(ax + by), \partial z / \partial y = 2(bx + cy)$$

$$(b) \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{(ad - bc)y}{(cx + dy)^2}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{(bc - ad)x}{(cx + dy)^2}$$

$$(c) \frac{\partial z}{\partial x} = 2x \arctan \frac{y}{x} - y \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2y \arctan \frac{y}{x} + x$$

$$4.4 \quad (a) \frac{2y}{2x - ny^{n-1}(x-y)^2} \quad (b) -\frac{y}{x}$$

$$4.5 \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 - 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y}}{\left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^3}$$

$$4.6 \quad \text{大小} = 1$$

$$\text{对 } x \text{ 轴的偏角} = -(\pi/3) + (-1)^n n\pi$$

$$4.7 \quad (a) xdx + ydy \quad (b) ydx + xdy$$

$$(c) \frac{(xdx + ydy)}{x^2 + y^2} \quad (d) \frac{dx}{1+x^2} - \frac{dy}{1+y^2}$$

$$4.8 \quad \sqrt{x^2+y^2} - y + C$$

第5章

[问 5.5]

$$(a) \quad \Gamma(n) = a^n \int_0^\infty y^{n-1} e^{-ay} dy$$

$$(b) \quad \Gamma(n) = (m+1)^n \int_0^1 y^m \left(\log \frac{1}{y}\right)^{n-1} dy$$

[问 5.7]

$$(a) \quad B(m, n) = \frac{1}{a^{m+n-1}} \int_0^a y^{m-1} (a-y)^{n-1} dy$$

$$(b) \quad B(m, n) = \int_0^\infty \frac{y^{n-1}}{(1+y)^{m+n}} dy$$

习题 5

$$5.1 \quad (a) 27 \quad (b) 6 \quad (c) \frac{170}{3} \quad (d) \frac{2\sqrt{3}-1}{2} \quad (e) \frac{\pi}{12} \quad (f) \frac{\pi}{4} \quad (g) \log \frac{4}{3} \quad (h) 1$$

$$(i) \frac{\pi a^2}{4} \quad (j) \frac{\pi}{2} \quad (k) \pi \quad (l) \frac{1}{2} \log 3$$

$$5.3 \quad bh^3/36$$

$$5.4 \quad \text{平均值} = 2a/\pi \quad \text{实效值} = a/\sqrt{2}$$

$$5.5 \quad \frac{\pi}{2} \rho r^3$$

第6章

$$[问 6.1] \quad (a) -\frac{9}{2}, \quad (b) 9\left(1+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$[问 6.2] \quad \int_{AB} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{AB} (f dx + g dy + h dz)$$

$$\int_{AB} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{AB} (f dx + g dy + h dz)$$

[问 6.9] 空间领域为 R , 它的边界曲面为 S 的时候

$$\iiint_R \nabla^2 u dx dy dz = \iint_S \frac{\partial u}{\partial n} dS \quad [\text{式}(6.74)]$$

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad [\text{式(6.75)}]$$

对于满足上述公式的 n , 有

$$\iint_S \frac{\partial u}{\partial n} dS = 0 \quad [\text{式(6.76)}]$$

$$u(a, b, c) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} u(a + \rho \cos \varphi \cos \theta, b + \rho \sin \varphi \cos \theta, c + \rho \sin \theta) d\varphi d\theta$$

[式(6.77)]

习题 6

6.3 $\frac{1}{2} \oint_C r^2 d\theta$

6.4 (a) $\frac{2(xi+yj)}{x^2+y^2} \quad \frac{2r}{r^2} \quad r=xi+yj$ (b) 0

6.5 (a) $\frac{r}{r}$ (b) 3 (c) $4r^2 r$ (d) $(2-r)e^{-r} r$

6.7 (a) $2\{x^2(y-z)i + y^2(z-x)j + z^2(x-y)k\}$

(b) $-2\{(y^2+z^2)i + (z^2+x^2)j + (x^2+y^2)k\}$

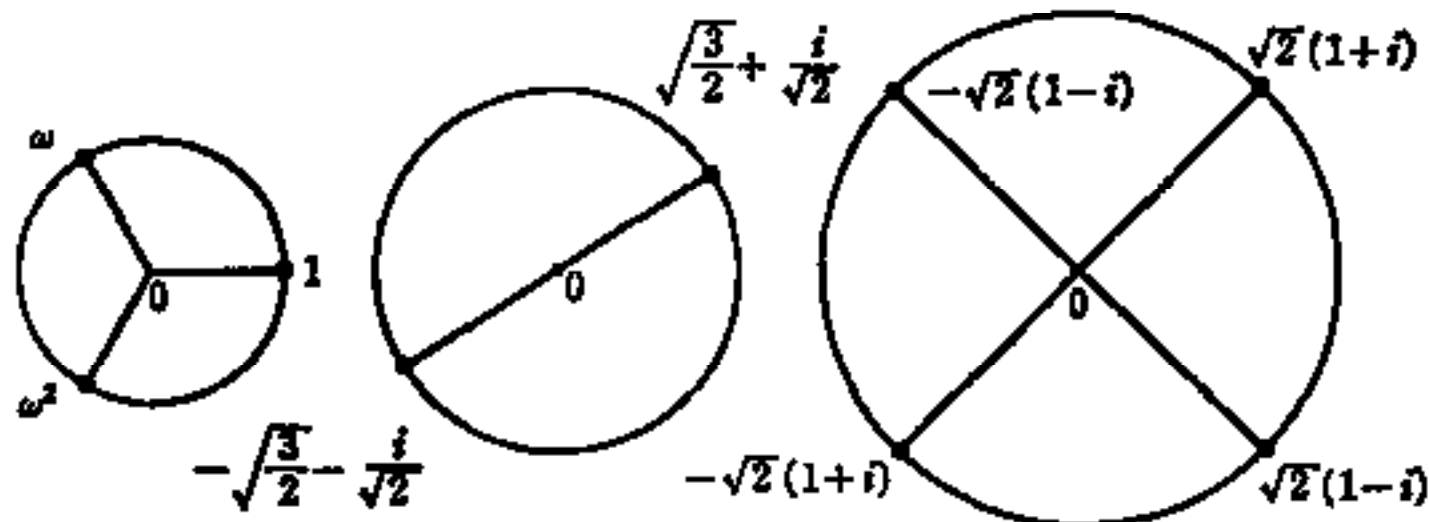
第 7 章

[问 7.1] (a) 4 (b) 6 (c) $7+i$ (d) $1-11i$ (e) $42+9i$ (f) $-\frac{2}{5}-\frac{13}{15}i$

(g) $5\sqrt{2}$ (h) $3\sqrt{205}$ (i) $1+11i$ (j) $\sqrt{41}$

[问 7.4] (a) 1 $\omega = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $\omega^2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

(b) $\pm \left[\sqrt{\frac{3}{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}} \right]$ (c) $\pm \sqrt{2}(1+i), \pm \sqrt{2}(1-i)$



[问 7.5] 正则函数

[问 7.6] $f(z) = u + i \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \left(-\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy \right) + Ci$

$$f(z) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \left(\frac{\partial v}{\partial y} dx - \frac{\partial v}{\partial x} dy \right) + iv + C \quad (C = \text{任意的实常数})$$

[问 7.7] $\cosh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \sinh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$

除各项的符号外, 均与 $\cos z, \sin z$ 的展开相同, 仅符号每隔一项不同。

[问 7.9] (a) $2e^{\pi i/6}$

(b) $2e^{\pi i/2}$ (c) $5e^{\pi i}$ (d) $\sqrt{2}e^{\pi i/4}$ (e) $2e^{-\pi i/3}$ (f) $e^{-\pi i/2}$ (g) $3\sqrt{2}e^{5\pi i/4}$

[问 7.11] 如设实部为 u , 虚部为 v , 则

(a) $u = \sin x \cosh y, v = \cos x \sinh y$

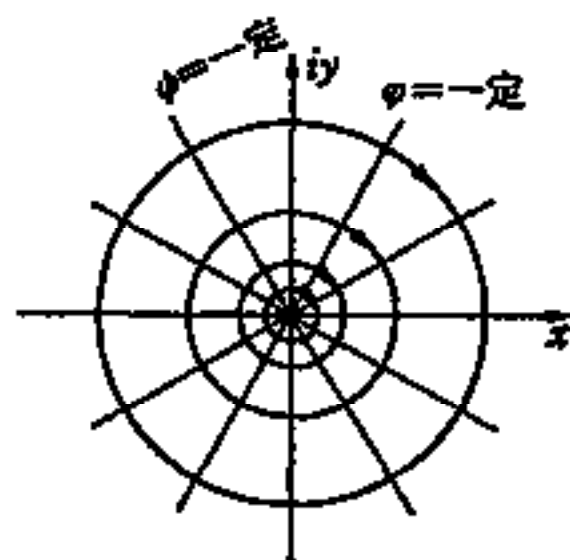
(b) $u = \cosh x \cos y, v = \sinh x \sin y$

(c) $u = \sinh x \cos y, v = \cosh x \sin y$

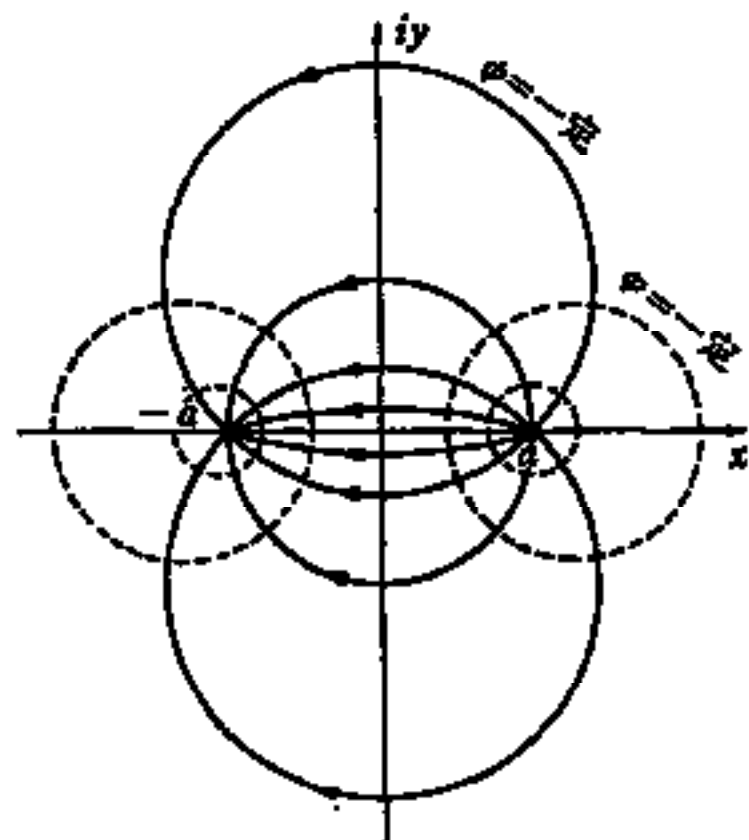
[7.15] $2\pi A$

[7.16]

(a) 流线是以原点为中心的同心圆族, 在 $A > 0$ 时, 是位于原点的周围, 沿这些同心圆族, 绕时针方向的流动。 $A < 0$ 时, 为与上述相反的流动。流速的大小与从圆心始的距离成反比。等势线是从原点出发的射线。



(b) 流线是通过点 a 和点 $-a$ 的圆族, 当 $A > 0$ 时, 是从点 a 流向 $-a$ 的流动。等势线是由点 $a, -a$ 的距离之比为恒定点的轨迹, 是称为阿波罗尼乌斯轨迹 (Apollonius' locus) 的圆族。



习题 7

7.1 (a) $18 + 26i$ (b) $\frac{3}{5} - \frac{4}{5}i$ (c) $-7 - 24i$

(d) $28 - 4i$

7.2 (a) 16 (b) $\sqrt[3]{8}e^{3\pi i/16}, \sqrt[3]{8}e^{11\pi i/16}, \sqrt[3]{8}e^{19\pi i/16}$

7.9 (a) $v = 3x^2y - y^3 + 6xy + C$

(b) $y \frac{\partial \varphi}{\partial x} - x \frac{\partial \varphi}{\partial y} + C$

式中 $C = \text{积分常数}$

$$7.12 \quad (a) \quad f(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(Re^{i\theta}) Re^{i\theta}}{Re^{i\theta} - re^{i\theta}} d\theta$$

第 8 章

[问 8.3]

$$x(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin 2\pi n t$$

[问 8.8]

$$(a) \frac{1}{s+a} \quad (b) \frac{s}{s^2-a^2} \quad (c) \frac{a}{s^2-a^2}$$

[问 8.9]

$$(a) \frac{1}{s-\omega i} \quad (b) \frac{1}{s+\omega i} \quad (c) \frac{s}{s^2+\omega^2} \quad (d) \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

习题 8

$$8.1 \quad (a) \quad x = 2 \left(\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \dots \right)$$

$$(b) \quad |x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left(\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots \right)$$

$$8.2 \quad \frac{4g}{\pi} \left(\sin \frac{\pi x}{l} + \frac{1}{3} \sin \frac{3\pi x}{l} + \frac{1}{5} \sin \frac{5\pi x}{l} + \dots \right)$$

$$8.3 \quad 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \zeta^n \cos n\theta$$

$$8.7 \quad \frac{1}{s} (1 - e^{-\pi})$$

第 9 章

[问 9.1]

$$(a) \quad x^2 + y^2 = C \quad (b) \quad y = C \left(\frac{x-a}{x+a} \right)^{1/2a}$$

[问 9.2]

$$i = \frac{E_0}{\sqrt{R^2 + L^2 \omega^2}} \{ \sin(\omega t - \epsilon) + e^{-(R/L)t} \sin \epsilon \}$$

[问 9.3]

$$(a) \quad x = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-3t} + \frac{3}{52} (\sin 2t - 5 \cos 2t)$$

$$(b) \quad x = e^{3t} (C_1 + C_2 t) + \frac{1}{4} e^t$$

$$(c) x = e^{2t}(C_1 \cos 3t + C_2 \sin 3t) + \frac{1}{40}(\sin t - 3 \cos t)$$

习题 9

$$9.1 \quad (a) y = C\{(x-a)/(x+a)\}^{1/2a} \quad (b) y = x - 1 + Ce^{-x}$$

$$(c) y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x \quad (d) y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x}$$

$$(e) y = e^{-x/2} \left(C_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x \right)$$

$$(f) x = e^{a/\sqrt{2}} \left(C_1 \sin \frac{at}{\sqrt{2}} - C_2 \cos \frac{at}{\sqrt{2}} \right) + e^{-a/\sqrt{2}} \left(-C_3 \sin \frac{at}{\sqrt{2}} + C_4 \cos \frac{at}{\sqrt{2}} \right)$$

$$y = e^{a/\sqrt{2}} \left(C_1 \cos \frac{at}{\sqrt{2}} + C_2 \sin \frac{at}{\sqrt{2}} \right) + e^{-a/\sqrt{2}} \left(C_3 \cos \frac{at}{\sqrt{2}} + C_4 \sin \frac{at}{\sqrt{2}} \right)$$

$$9.2 \quad (a) x = Ce^{y^3/3x^3} \quad (b) y(2y-1)^{3/2} = Cx^{7/2}$$

$$9.3 \quad (a) x = C_1 \cos pt + C_2 \sin pt + \frac{C}{p^2}$$

$$(b) x = C_1 \cos pt + C_2 \sin pt + \frac{q}{p^2 - \omega^2} \sin \omega t$$

$$(c) x = e^{-bx} (C_1 \sin \sqrt{p^2 - b^2} t + C_2 \cos \sqrt{p^2 - b^2} t) + \frac{2b\omega q}{(p^2 - \omega^2)^2 + 4b^2 \omega^2} \sin \omega t \\ + \frac{(p^2 - \omega^2)q}{(p^2 - \omega^2)^2 + 4b^2 \omega^2} \cos \omega t$$

这样,能如下那样简化

$$x = Ae^{-bx} \cos(\sqrt{p^2 - b^2} t + \epsilon) + \frac{q \sin \epsilon'}{2b\omega} \cos(\omega t - \epsilon')$$

式中 $A, \epsilon =$ 任意常数

$$\tan \epsilon' = \frac{2b\omega}{p^2 - \omega^2}$$

$$9.4 \quad (a) x = C_1 \cos pt + C_2 \sin pt \quad \text{式中} \quad p^2 = k/m$$

$$(b) x = x_0 \cos pt + \frac{v_0}{p} \sin pt \quad (c) T = 2\pi \sqrt{m/k}$$

$$9.5 \quad (a) y = C_1 \sin \sqrt{\frac{P}{EI}} x + C_2 \cos \sqrt{\frac{P}{EI}} x \quad (b) P = \frac{n^2 \pi^2 EI}{l^2} (n=1, 2, \dots)$$

$$(c) P = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

$$9.6 \quad y = \frac{e^{-\beta x}}{2\beta^3 EI} \{ P \cos \beta x - \beta M_0 (\cos \beta x - \sin \beta x) \}$$

$$\text{式中 } \beta = \sqrt[4]{k/4EI}$$

$$9.7 \quad \text{挠度 } w(r) = \frac{qa^4}{64D} \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right)^2$$

$$\text{最大挠度 } r=0, \quad w_{\max} = \frac{qa^4}{64D}$$

$$9.8 \quad y = C_1 x + C_2 \frac{1}{x}$$

$$9.9 \quad x = \frac{1}{\Delta} \left\{ \frac{Q}{m} \left(\frac{2k_1 h^2 + 2k_2 b^2}{m\kappa^2} - \omega^2 \right) - \frac{2k_1 Mh}{m^2 \kappa^2} \right\} \cos \omega t$$

$$\theta = \frac{1}{\Delta} \left\{ \frac{M}{mk^2} \left(\frac{2k_1}{m} - \omega^2 \right) - \frac{2Qk_1 h}{m^2 \kappa^2} \right\} \cos \omega t$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{2k_1}{m} - \omega^2 & \frac{2k_1 h}{m} \\ \frac{2k_1 h}{m\kappa^2} & \frac{2k_1 h^2 + 2k_2 b^2}{m\kappa^2} - \omega^2 \end{vmatrix}$$

$$9.10 \quad u = F(x+iy) + F(x-iy) + \frac{1}{4}C(x^2+y^2)$$

$F(z)$ 是 z 的正则函数

特解 $\frac{1}{4}C(x^2+y^2)$ 也可以等于 $\frac{1}{2}Cx^2, \frac{1}{2}Cy^2$

第 10 章

[问 10.1]

$$F_y = \frac{d}{dx} F_y' + \frac{d^2}{dx^2} F_y'' - \cdots + \cdots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} F_{y^{(n)}} = 0$$

习题 10

$$10.1 \quad \frac{d}{dx} F_{xy} - F_{yx} = 0, \quad \frac{d}{dx} F_{xy} - F_{yx} = 0, \cdots$$

$$10.2 \quad F_{x_x} \cos(xn) + F_{x_y} \cos(yn) = 0$$

第 11 章

[问 11.1]

式(11.34) $\cdots O(\delta)$ 式(11.35) $\cdots O(\delta^2)$

习题 11

11.1 $A=20$ $B=40$ $C=30$

$$\begin{aligned}
 11.2 \quad (a) \quad \left(\frac{\partial^4 f}{\partial x^4} \right)_{x,y} &= \frac{1}{\delta^4} \{ f(x-2\delta, y) - 4f(x-\delta, y) \\
 &\quad + 6f(x, y) - 4f(x+\delta, y) + f(x+2\delta, y) \} \\
 (b) \quad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)_{x,y} &= \frac{1}{4\delta^2} \{ f(x+\delta, y+\delta) - f(x-\delta, y+\delta) \} \\
 &\quad + f(x-\delta, y-\delta) - f(x+\delta, y-\delta) \} \\
 (c) \quad \left(\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} \right)_{x,y} &= \frac{1}{\delta^4} [4f(x, y) - 2\{ f(x+\delta, y) \\
 &\quad + f(x-\delta, y) + f(x, y+\delta) + f(x, y-\delta) \} \\
 &\quad + f(x+\delta, y+\delta) + f(x-\delta, y+\delta) + f(x-\delta, y-\delta) \\
 &\quad + f(x+\delta, y-\delta)] \\
 (d) \quad \left(\frac{\partial^4 f}{\partial y^4} \right)_{x,y} &= \frac{1}{\delta^4} \{ f(x, y-2\delta) - 4f(x, y-\delta) \\
 &\quad + 6f(x, y) - 4f(x, y+\delta) + f(x, y+2\delta) \} \\
 (e) \quad (\nabla^2 f)_{x,y} &= \frac{1}{\delta^4} [20f(x, y) - 8\{ f(x+\delta, y) \\
 &\quad + f(x-\delta, y) + f(x, y+\delta) + f(x, y-\delta) \} \\
 &\quad + 2\{ f(x+\delta, y+\delta) + f(x-\delta, y+\delta) + f(x-\delta, y-\delta) \\
 &\quad + f(x+\delta, y-\delta) \} + f(x+2\delta, y) + f(x-2\delta, y) \\
 &\quad + f(x, y+2\delta) + f(x, y-2\delta)]
 \end{aligned}$$

封面

工程数学解析

数学在力学中的应用

關谷 壮 著

ISBN 7-5608-2499-4



9 787560 824994 >

ISBN7-5608-2499-4/O·220

定价：23.00元